Information thermodynamics of quantum systems

Yohei Morikuni
Department of Physics, University of Tokyo

2016 年 4 月 20 日

概要

量子系における情報熱力学は熱力学、量子力学、情報理論の 3 つが交わる分野であり、それらの関係を理解するために不可欠である。近年では、情報熱力学を非平衡状態の系に拡張し、情報処理を含む場合のゆらぎの定理や Jarzynski 等式を導くことが行われている。特に、古典的な系における情報処理を含む非平衡関係式の研究によって、熱力学と情報の間の関係についてよく理解されるようになった。しかし、量子系における研究はあまり行われておらず、量子力学との関係が不明確である。

そこで、量子系における情報処理を含む非平衡関係式を調べ、フィードバック過程・測定過程・情報消去過程それぞれについての量子 Jarzynski 等式を導くことに成功した。測定過程と情報消去過程についての量子 Jarzynski 等式に Jensen の不等式を用いると、沙川と上田によって導かれた測定過程と情報消去過程についての熱力学第二法則を導くことができる。

この修士論文では、まず沙川と上田によって導かれた、フィードバック過程・測定過程・情報消去過程それぞれについての情報熱力学第二法則を記述する。その後、我々の中心的な結果として、 3 つの過程それぞれについての量子 Jarzynski 等式の導出を述べる。

目次

第 1 章

イントロダクション

量子系の情報熱力学は、マクロな系の理論である熱力学、ミクロな物体を扱う量子力学、そして、情報処理の間の関係を理解するために不可欠である。量子力学とその情報処理は量子情報理論として研究され、量子コンピュータや量子テレポーテーションの研究の中で使われている [1]。また、熱力学と情報処理は情報熱力学と呼ばれ、これによりエントロピーについて理解が深まっている。しかし、量子系の情報熱力学には、多くの課題が残されている。

情報熱力学は従来の熱力学を、情報処理が行われる系に拡張した理論である。情報処理とは、系の測定を行う測定過程、測定結果よって系に対する力学操作を変えるフィードバック過程、測定によって得た情報を消去する情報消去過程の三つの過程のことである。この理論の研究は 19 世紀に J. C. Maxwell が行った思考実験の考察 [2] から始まっている。Maxwell の思考実験は次のようなものである：

1. 温度が均一な気体が入った容器を用意する。
2. 容器を仕切りで区切り、二つのそれぞれの部分を A と B とする。ただし、仕切りには小さな穴が空いており、穴は開閉が可能とする。
3. 個々の気体分子を見ることのできる観測者（「Maxwell の悪魔」と呼ばれる）を仮定する。その観測者は速い分子のみを A から B へ、遅い分子のみを B から A へ移すように仕切りの穴を開閉するとする。
4. 3. の過程を繰り返すことによって、観測者は仕事をせずに A の温度を上げ、B の温度を下げることができる。

この思考実験では明らかに系のエントロピーが減少しており、一見して熱力学第二法則を破っているように見える。この問題は初め、系の観測により系の状態を変え、相応するエントロピーの増大が起きていると考えられていたが、C. H. Bennett によりエントロピーの増大を起こさない観測が可能であることが示された。その後、Bennett 自身により、情報消去の際にエントロピーの増大が必要なことを示した Landauer の原理 [3] を組み合わせることにより問題

が解決され [4]、熱力学と情報が密接に関係することが理解された。現在、沙川と上田により、量子系でのフィードバック過程、測定過程、情報消去過程における熱力学第二法則が導かれている [8, 9]。また、情報の初期化を含めたサイクル過程を考えると従来の熱力学第二法則が導かれることがわかっている。Maxwell の悪魔のパラドックスの解決後も、より詳細に熱力学と情報の関係を理解し、応用するため、現在もさまざまな研究が行われたいる [3–30]。

近年、熱統計力学の分野ではゆらぎの定理や Jarzynski 等式といった非平衡系における非自明な等式が発見されている。これらの非平衡関係式は平衡状態から離れた領域にも普遍的な構造があることを示唆している。非平衡関係式は熱力学第二法則を含み、特に、Jarzynski 等式に対して Jensen の不等式を用いて変形すると熱力学第二法則の表現の一つである、最大仕事の原理が導かれる。

そのため、情報熱力学もこの非平衡系にも研究の幅を広げ、非平衡関係式のゆらぎの定理や Jarzynski 等式を情報処理を含む場合に拡張することが行われている [12–14, 16, 20, 21, 25–27, 30]。特に、古典的な系におけるこれらの研究により、系同士の状態の相関の変化が重要であること [20, 27] や、より一般的な系で行われる情報量の移動とエントロピーの関係 [25] などが理解されるようになった。

この古典的な系における情報処理を含む非平衡関係式の研究では、観測による系への影響が考えられていない。そのため、量子論のように、観測による系への影響を回避できない場合については、フィードバック過程については調べられているが、古典的な系の場合ほどあまりよく理解されていない。そこで、本研究では、古典系で成り立つ情報処理を含む非平衡関係式、特に Jarzynski 等式が、量子系でも同様に成り立っているのかを調べた。

その結果、量子系で行われる測定過程および情報消去過程で成り立つ Jarzynski 等式を導いた。これは、沙川と上田によって導かれた情報熱力学第二法則 [8, 9] の設定に対し、メモリーの初期状態が誤差を含む場合に拡張してある。また、Jensen の不等式により、メモリーの初期状態に誤差がある場合の測定過程および情報消去の第二法則が導かれる。この第二法則は誤差なしの極限で沙川と上田による第二法則になる。

この修士論文は以下の構成になっている：第 2 章では、量子系の情報熱力学で重要となる QC-相互情報量を定義し、沙川と上田によって示された情報熱力学第二法則 [8, 9] を導く。第 3 章では、誤差がない場合と古典的な誤差が入る場合の量子系での Jarzynski 等式 [16] を導き、量子系でも古典系と同じような関係式が成り立っていることを示す。第 4 章では、量子系で行われる測定過程および情報消去過程で成り立つ Jarzynski 等式 [30] を導出し、測定過程および情報消去過程の第二法則を等式から導くことができることを見る。第 3 章と第 4 章の内容が著者の得た成果である。

第 2 章

情報熱力学第二法則

この章では情報熱力学の第二法則について書く。特に、沙川と上田 [8,9] によって導かれた結果を中心に述べる。彼らはそれぞれ別の熱浴を持つ熱力学的な系とメモリーを考えた。そのとき、熱力学的な系のフィードバック過程、及び、メモリーの測定過程、情報消去過程のそれぞれについての不等式を導いた:

$$W_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{S}} \leq -\Delta F^{\mathrm{S}} + \beta^{-1} I_{\mathrm{QC}}, \tag{2.1}$$

$$W_{\mathrm{meas}}^{\mathrm{M}} \geq \Delta F^{\mathrm{M}} - \beta^{-1} \left(H - I_{\mathrm{QC}}\right), \tag{2.2}$$

$$W_{\mathrm{eras}}^{\mathrm{M}} \geq -\Delta F^{\mathrm{M}} + \beta^{-1} H. \tag{2.3}$$

ここで、$W_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{S}}$ は熱力学的な系がした仕事、$W_{\mathrm{meas}}^{\mathrm{M}}$ と $W_{\mathrm{eras}}^{\mathrm{M}}$ はそれぞれ測定過程と情報消去過程でメモリーにされた仕事、$\Delta F^{\mathrm{S}}, \Delta F^{\mathrm{M}}$ はそれぞれ熱力学的な系とメモリーの自由エネルギーの変化、β は逆温度、I_{QC} は QC-相互情報量 [8,31,32]、H は Shannon エントロピーを表す。この三つの不等式を合わせると不等式は

$$W_{\mathrm{meas}}^{\mathrm{M}} + W_{\mathrm{eras}}^{\mathrm{M}} - W_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{S}} \geq \Delta F^{\mathrm{S}} \tag{2.4}$$

となる。この左辺は熱力学的な系とメモリーを合わせた系にされた仕事を表すので、熱力学的な系とメモリー全体で従来の熱力学第二法則が回復することがわかる。

以下では、まず QC-相互情報量を定義する。続いて、フィードバック過程、測定過程、情報消去過程の三つの過程についての第二法則 (2.1)、(2.2)、(2.3) をそれぞれ節 2.2、2.4、2.5 で導出する。

2.1 QC-相互情報量

ここでは QC-相互情報量を定義する。この量は Groenewold [31] と小澤 [32] が導入し、後に、沙川と上田 [8] によって再導入された。

測定過程に対応する量子オペレーションの組 [1] を $\{\mathcal{E}_k\}_k$ とする。このとき、任意の密度行列 $\hat{\rho}$ を測定したときの QC-相互情報量を

$$I_{\mathrm{QC}}(\hat{\rho}, \mathcal{E}_k) := S(\hat{\rho}) - \sum_k p(k) S\left(\frac{1}{p(k)} \mathcal{E}_k(\hat{\rho})\right) \tag{2.5}$$

と定義する [32]。ここで、

$$S(\hat{\rho}) := -\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho} \log \hat{\rho}\right] \tag{2.6}$$

$$p(k) := \mathrm{Tr}\left[\mathcal{E}_k(\hat{\rho})\right] \tag{2.7}$$

はそれぞれ von Neumann エントロピー、測定結果 k を得る確率である。この QC-相互情報量は、測定前と測定後の von Neumann エントロピーの差であり、測定前の状態 $\hat{\rho}$ と測定過程 $\mathcal{E}_k$ のみで構成される。特に、ここに現れる量子オペレーション $\mathcal{E}_k$ が

$$\sum_k \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k = \hat{I} \tag{2.8}$$

を満たす演算子（測定演算子） $\hat{M}_k$ を用いて

$$\mathcal{E}_k(\hat{\rho}) = \hat{M}_k \hat{\rho} \hat{M}_k^\dagger \tag{2.9}$$

と表せるとすると、QC-相互情報量 (2.5) は正作用素値測度 (Positive Operator Valued Measure, POVM) $\hat{E}_k := \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k$ を用いて

$$I_{\mathrm{QC}}(\hat{\rho}, \mathcal{E}_k) = S(\hat{\rho}) + H(\boldsymbol{p}) + \mathrm{Tr}\left[\left(\sqrt{\hat{E}_k} \hat{\rho} \sqrt{\hat{E}_k}\right) \log\left(\sqrt{\hat{E}_k} \hat{\rho} \sqrt{\hat{E}_k}\right)\right] \tag{2.10}$$

と書くことができる [8]。ここで、

$$H(\boldsymbol{p}) := -\sum_k p(k) \log p(k) \tag{2.11}$$

は Shannon エントロピーである。このとき、式 (2.10) の QC-相互情報量は

$$0 \leq I_{\mathrm{QC}}(\hat{\rho}, \mathcal{E}_k) \leq H(\boldsymbol{p}) \tag{2.12}$$

を満たす [8]。

古典的な測定の場合は、QC-相互情報量が古典的な相互情報量に帰着することを述べる。密度行列 $\hat{\rho}$ の固有値分解を

$$\hat{\rho} = \sum_i \lambda(i) |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{2.13}$$

とする。このとき、

$$S(\hat{\rho}) = H(\boldsymbol{\lambda}) = -\sum_i \lambda(i) \log \lambda(i) \tag{2.14}$$

である。密度行列 $\hat{\rho}$ の固有状態 $|\psi_i\rangle$ を量子オペレーション $\mathcal{E}_k$ で測定したとき、k を得る確率は

$$p(k|i) := \mathrm{Tr}\left[\mathcal{E}_k(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)\right] \tag{2.15}$$

となる。この確率 $p(k|i)$ は $\sum_k p(k|i) = 1$ を満たし、確率 $p(k)$ と

$$p(k) = \sum_i \lambda(i)\mathrm{Tr}\left[\mathcal{E}_k(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)\right] = \sum_i \lambda(i)p(k|i) \tag{2.16}$$

という関係があるので、i についての条件付き確率であることがわかる。そこで、$p(k|i)$ に基いて古典的な相互情報量

$$I_{\mathrm{class}}(\hat{\rho}, \mathcal{E}_k) := \sum_{i,k} \lambda(i)p(k|i)\log\frac{p(k|i)}{p(k)} = H(\boldsymbol{\lambda}) + H(\boldsymbol{p}) + \sum_{i,k}\left(\lambda(i)p(k|i)\right)\log\left(\lambda(i)p(k|i)\right) \tag{2.17}$$

を考えることができる。これは系を乱さない古典的な測定のとき、QC-相互情報量に等しい。なぜなら、すべての k に対して、系を測定する POVM $\hat{E}_k$ と測定される密度行列 $\hat{\rho}$ は可換である。つまり、$\left[\hat{\rho}, \hat{E}_k\right] = 0$ であるので、式 (2.10) の右辺第 3 項が

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\sqrt{\hat{E}_k}\hat{\rho}\sqrt{\hat{E}_k}\right)\log\left(\sqrt{\hat{E}_k}\hat{\rho}\sqrt{\hat{E}_k}\right)\right] = \sum_{i,k}\left(\lambda(i)p(k|i)\right)\log\left(\lambda(i)p(k|i)\right) \tag{2.18}$$

となり、$S(\hat{\rho}) = H(\boldsymbol{\lambda})$ より

$$I_{\mathrm{QC}}(\hat{\rho}, \mathcal{E}_k) = I_{\mathrm{class}}(\hat{\rho}, \mathcal{E}_k) \tag{2.19}$$

となるからである。

なお、より一般的な測定では QC-相互情報量 (2.5) と古典的な相互情報量 (2.17) の間には、式 (2.19) ではなく、次のような関係がある。

定理 1. 任意の純粋状態 $\hat{\rho}_{\mathrm{pure}}$ に対し、測定に対応する量子オペレーションの組 $\{\mathcal{E}_k\}$ のすべての k について $\mathcal{E}_k\left(\hat{\rho}_{\mathrm{pure}}\right)/\mathrm{Tr}\left[\mathcal{E}_k\left(\hat{\rho}_{\mathrm{pure}}\right)\right]$ が純粋状態であるとき、任意の密度行列 $\hat{\rho}$ について

$$I_{\mathrm{QC}}(\hat{\rho}, \mathcal{E}_k) \geq I_{\mathrm{class}}(\hat{\rho}, \mathcal{E}_k) \tag{2.20}$$

を満たす [32]。

以上から、QC-相互情報量は古典的な相互情報量と密接に関係していることがわかる。

2.2　フィードバック過程についての情報熱力学第二法則

この節では、フィードバック過程に対する情報熱力学第二法則 (2.1) を導く [8]。熱力学的な系 S のフィードバック過程を考える。この過程では、まず時刻 t_{init} から時刻 t_{meas} まで系に力

学操作を行う。その後、測定を行い、測定結果を用いて時刻 t_{feed} までフィードバックコントロールを行う。最後に再び力学操作を時刻 t_{fin} まで行う。

系 S は量子系とし、逆温度がそれぞれ β の熱浴 B と接触している。ただし、過程の始めと終わりでは系 S と 熱浴 B は接触していないものとする。系全体では孤立した量子系となっているとする。

熱力学的な系 S の初期状態は温度 β の熱平衡状態 、熱浴 B の初期状態はそれぞれの温度での熱平衡状態とする。つまり、系全体の密度行列は

$$\hat{\rho}_{\mathrm{init}} = \frac{e^{-\beta \hat{H}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}}}}{Z^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}}} \otimes \frac{e^{-\beta \hat{H}^{\mathrm{B}}}}{Z^{\mathrm{B}}} \tag{2.21}$$

である。ただし、$\hat{H}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}}$ と $\hat{H}^{\mathrm{B}}$ はそれぞれ熱力学的な系 S と熱浴 B の初期ハミルトニアン、$Z^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}} := \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta \hat{H}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}}}\right]$、$Z^{\mathrm{B}} := \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta \hat{H}^{\mathrm{B}}}\right]$ である。また、このときの系 S と熱浴 B の自由エネルギーは

$$F^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}} := -\beta^{-1} \log Z^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}} \tag{2.22}$$

$$F^{\mathrm{B}} := -\beta^{-1} \log Z^{\mathrm{B}} \tag{2.23}$$

である。

はじめに、時刻 t_{init} から t_{meas} までの力学的操作による時間発展を、系全体のユニタリー演算子 $\hat{U}_{\mathrm{init}}$ を用いて行う。その後、$\sum_k \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k = 1$ を満たす S 上の測定演算子の組 $\left\{\hat{M}_k\right\}_k$ で測定する。この測定過程に対応する量子オペレーション $\mathcal{E}_k$ は $\mathcal{E}_k(\hat{\rho}) := \hat{M}_k \hat{\rho} \hat{M}_k^\dagger$ である。このときの測定結果を k とする。測定終了後、測定結果 k に依存した力学操作を S に行う。これをフィードバックコントロールと呼ぶ。つまり、測定結果 k に依存するユニタリー演算子 $\hat{U}_k$ を用いて時刻 t_{feed} まで系全体を時間発展させる。最後に測定結果 k に依存しない力学操作に対応するユニタリー演算子 $\hat{U}_{\mathrm{fin}}$ で系全体を時刻 t_{fin} まで時間発展させる。注意として、一般的にフィードバックコントロールにより系 S の時刻 t_{fin} におけるハミルトニアンは測定結果 k に依存するが、ここでは、測定結果によらないハミルトニアン $\hat{H}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{fin}}$ になる場合を考える。

測定結果が k のとき、時刻 t_{fin} における系全体の密度行列は

$$\hat{\rho}^{(k)}_{\mathrm{fin}} := \frac{1}{p(k)} \hat{U}_{\mathrm{fin}} \hat{U}_k \hat{M}_k \hat{U}_{\mathrm{init}} \hat{\rho}_{\mathrm{init}} \hat{U}^\dagger_{\mathrm{init}} \hat{M}^\dagger_k \hat{U}^\dagger_k \hat{U}^\dagger_{\mathrm{fin}} \tag{2.24}$$

である。ここで、$p(k)$ は測定結果 k が測定される確率であり、

$$p(k) = \mathrm{Tr}\left[\hat{M}_k \hat{U}_{\mathrm{init}} \hat{\rho}_{\mathrm{init}} \hat{U}^\dagger_{\mathrm{init}} \hat{M}^\dagger_k\right] \tag{2.25}$$

と計算できる。また、終状態のアンサンブル平均は

$$\hat{\rho}_{\mathrm{fin}} := \sum_k p(k) \hat{\rho}^{(k)}_{\mathrm{fin}} = \hat{U}_{\mathrm{fin}} \hat{U}_k \hat{M}_k \hat{U}_{\mathrm{init}} \hat{\rho}_{\mathrm{init}} \hat{U}^\dagger_{\mathrm{init}} \hat{M}^\dagger_k \hat{U}^\dagger_k \hat{U}^\dagger_{\mathrm{fin}} \tag{2.26}$$

である。

このとき、フィードバック過程についての第二法則は

$$W_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{S}} \leq -\Delta F^{\mathrm{S}} + \beta^{-1} I_{\mathrm{QC}} \tag{2.27}$$

となる。ここで、$W_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{S}}$ 、ΔF^{S} 、I_{QC} はそれぞれ、この過程で系 S が外部にした仕事と自由エネルギーの変化と観測過程 $\mathcal{E}_k$ による QC-相互情報量で、

$$W_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{S}} := \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\left(\hat{H}_{\mathrm{init}}^{\mathrm{S}} + \hat{H}^{\mathrm{B}}\right)\right] - \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{\mathrm{fin}}\left(\hat{H}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{S}} + \hat{H}^{\mathrm{B}}\right)\right], \tag{2.28}$$

$$\Delta F^{\mathrm{S}} := F_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{S}} - F_{\mathrm{init}}^{\mathrm{S}} = \beta^{-1} \log \frac{Z_{\mathrm{init}}^{\mathrm{S}}}{Z_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{S}}}, \tag{2.29}$$

$$I_{\mathrm{QC}} := I_{\mathrm{QC}}\left(\hat{U}_{\mathrm{init}}\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\hat{U}_{\mathrm{init}}^{\dagger}, \mathcal{E}_k\right) \tag{2.30}$$

である。ここで、$F_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{S}} := -\beta^{-1} \log Z_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{S}}$ は系 S の終状態の自由エネルギー、$Z_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{S}} := \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta \hat{H}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{S}}}\right]$ である。

式 (2.27) は以下のような計算することで導かれる：始状態から終状態へ変化していったときの von Neumann エントロピーの変化には上限と下限がある。まず、上限は

$$S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\right) - S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{fin}}\right) \leq S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\right) - \sum_k p(k) S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{fin}}^{(k)}\right) \tag{2.31}$$

$$= S\left(\hat{U}_{\mathrm{init}}\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\hat{U}_{\mathrm{init}}^{\dagger}\right) - \sum_k p(k) S\left(\frac{\hat{M}_k\hat{U}_{\mathrm{init}}\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\hat{U}_{\mathrm{init}}^{\dagger}\hat{M}_k^{\dagger}}{p(k)}\right) \tag{2.32}$$

$$= I_{\mathrm{QC}}\left(\hat{U}_{\mathrm{init}}\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\hat{U}_{\mathrm{init}}, \mathcal{E}_k\right) \tag{2.33}$$

である。よって、

$$S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\right) - S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{fin}}\right) \leq I_{\mathrm{QC}} \tag{2.34}$$

となる。

次に、下限は以下のようにして得られる。任意の密度行列 $\hat{\rho}$ と $\hat{\sigma}$ についての相対エントロピーの非負性 [1]

$$S\left(\hat{\rho} \| \hat{\sigma}\right) := \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\left(\log\hat{\rho} - \log\hat{\sigma}\right)\right] \geq 0 \tag{2.35}$$

より、

$$S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\right) - S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{fin}}\right) \geq S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\right) + \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{\mathrm{fin}} \log \hat{\rho}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{can}}\right] \tag{2.36}$$

が成り立つ。なお、

$$\hat{\rho}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{can}} := \frac{e^{-\beta \hat{H}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{S}}}}{Z_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{S}}} \otimes \frac{e^{-\beta \hat{H}^{\mathrm{B}}}}{Z^{\mathrm{B}}} \tag{2.37}$$

である。これを計算すると

$$\begin{aligned} & S(\hat{\rho}_{\mathrm{init}}) - S(\hat{\rho}_{\mathrm{fin}}) \\ & \geq S(\hat{\rho}_{\mathrm{init}}) + \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{\mathrm{fin}} \log \hat{\rho}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{can}}\right] && (2.38) \\ & = \beta\left\{\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\left(\hat{H}_{\mathrm{init}}^{\mathrm{S}} + \hat{H}^{\mathrm{B}}\right)\right] - F_{\mathrm{init}}^{\mathrm{S}} - F^{\mathrm{B}}\right\} - \beta\left\{\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{\mathrm{fin}}\left(\hat{H}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{S}} + \hat{H}^{\mathrm{B}}\right)\right] - F_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{S}} - F^{\mathrm{B}}\right\} && (2.39) \\ & = \beta\left(W_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{S}} + \Delta F^{\mathrm{S}}\right) && (2.40) \end{aligned}$$

となる。よって、上限 (2.34) と下限 (2.40) により、フィードバック過程についての第二法則 (2.27) が導かれる。

■**コメント**　フィードバック過程がサイクルの場合、つまり、初期ハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{init}}^{\mathrm{S}}$ と終状態のハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{fin}}^{\mathrm{S}}$ が等しいのとき、自由エネルギーの差は $\Delta F^{\mathrm{S}} = 0$ となる。よって、式 (2.27) は

$$W_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{S}} \leq \beta^{-1} I_{\mathrm{QC}} \tag{2.41}$$

に帰着する。これは、フィードバックを含むときに拡張された Kelvin の原理である。また、古典極限では、式 (2.19) のように QC-相互情報量 I_{QC} が古典的な相互情報量 I_{class} に帰着するので、式 (2.27) は

$$W_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{S}} \leq -\Delta F^{\mathrm{S}} + \beta^{-1} I_{\mathrm{class}} \tag{2.42}$$

となる。

2.3　量子系におけるメモリー

節 2.4 と節 2.5 で測定過程と情報消去過程についての第二法則を導くために、ここではメモリーの量子系を設定する [9]。メモリーは熱力学的な系を直接測定し、測定結果を蓄える。メモリーを射影測定することによって蓄えた測定結果を読み出す。

メモリーの系 M のヒルベルト空間 $\mathcal{H}^{\mathrm{M}}$ を考える。この系は N 個のヒルベルト空間 $\mathcal{H}_k^{\mathrm{M}}, (k = 1, 2, \ldots, N)$ の直積でできている。この部分ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_k^{\mathrm{M}}$ に測定結果 k が記録される。部分ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_k^{\mathrm{M}}$ におけるのハミルトニアンを

$$\hat{H}_k^{\mathrm{M}} = \sum_{n_k} E_{n_k}^{\mathrm{M}} \hat{P}_{n_k}^{\mathrm{M}} \tag{2.43}$$

とする。ここで、$E_{n_k}^{\mathrm{M}}$ はエネルギー固有状態 $|E_{n_k}^{\mathrm{M}}\rangle$ についての固有値で、$\hat{P}_{n_k}^{\mathrm{M}}$ は $|E_{n_k}^{\mathrm{M}}\rangle$ への射影演算子である。また、$\left\{|E_{n_k}^{\mathrm{M}}\rangle\right\}_{n_k}$ は $\mathcal{H}_k^{\mathrm{M}}$ 上での正規直交基底であるとする。メモリー M 上に記録させた測定結果 k を読み出すときは、$\mathcal{H}_k^{\mathrm{M}}$ 上への射影演算子

$$\hat{\Pi}_k := \sum_{n_k} \hat{P}_{n_k}^{\mathrm{M}} \tag{2.44}$$

で M を測定する。

測定結果 k のときの逆温度 β のカノニカル分布は

$$\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{k,\mathrm{can}} := \frac{e^{-\beta \hat{H}^{\mathrm{M}}_k}}{Z^{\mathrm{M}}_k} = \sum_{n_k} \frac{e^{-\beta E^{\mathrm{M}}_{n_k}}}{Z^{\mathrm{M}}_k} \hat{P}^{\mathrm{M}}_{n_k} \tag{2.45}$$

である。ただし、$Z^{\mathrm{M}}_k := \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta \hat{H}^{\mathrm{M}}_k}\right]$ とする。また、そのときのヘルムホルツ自由エネルギーを

$$F^{\mathrm{M}}_k := -\beta^{-1} \log Z^{\mathrm{M}}_k \tag{2.46}$$

とする。

2.4　測定過程についての情報熱力学第二法則

ここでは、測定過程に対する情報熱力学第二法則 (2.2) を導く [9]。この過程では、節 2.3 で設定したメモリー M による系 S の間接測定、つまり、メモリー M と系 S が相互作用した後、メモリー M に射影測定を行う。

メモリー M は逆温度 β の熱浴 B に接触しているとする。ただし、過程の始まりと終わりではM と B は接触していないものとする。系全体は孤立した量子系であるとする。

系 S 、 メモリー M 、 熱浴 B のハミルトニアンをそれぞれ $\hat{H}^{\mathrm{S}}(t)$ 、 $\hat{H}^{\mathrm{M}}(t)$ 、 $\hat{H}^{\mathrm{B}}$ とし、S と M 、M と B の間の相互作用ハミルトニアンをそれぞれ $\hat{H}^{\mathrm{SM}}(t)$ と $\hat{H}^{\mathrm{MB}}(t)$ とする。このとき、系の全ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{tot}}(t) := \hat{H}^{\mathrm{S}}(t) + \hat{H}^{\mathrm{M}}(t) + \hat{H}^{\mathrm{B}} + \hat{H}^{\mathrm{SM}}(t) + \hat{H}^{\mathrm{MB}}(t) \tag{2.47}$$

となる。ただし、過程の始まりと終わりの時刻をそれぞれ t_{init} と t_{fin} として、

$$\hat{H}^{\mathrm{M}}\left(t_{\mathrm{init}}\right) = \hat{H}^{\mathrm{M}}\left(t_{\mathrm{fin}}\right) = \sum_{a=1}^{N} \hat{H}^{\mathrm{M}}_a, \tag{2.48}$$

$$\hat{H}^{\mathrm{SM}}\left(t_{\mathrm{init}}\right) = \hat{H}^{\mathrm{SM}}\left(t_{\mathrm{fin}}\right) = 0, \tag{2.49}$$

$$\hat{H}^{\mathrm{MB}}\left(t_{\mathrm{init}}\right) = \hat{H}^{\mathrm{MB}}\left(t_{\mathrm{fin}}\right) = 0 \tag{2.50}$$

であるとする。

系全体の初期状態は系 S 、メモリー M 、熱浴 B それぞれの初期状態の直積で書けるとする。系 S の初期状態は任意の密度行列 $\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}}$ 、メモリー M の初期状態は測定結果が $k = 0$ の逆温度 β の状態 $\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{0,\mathrm{can}}$ 、熱浴 B は逆温度 β のカノニカル分布

$$\hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}} := \frac{e^{-\beta \hat{H}^{\mathrm{B}}}}{Z^{\mathrm{B}}} \tag{2.51}$$

とする。ただし、 $Z^{\mathrm{B}} := \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta\hat{H}^{\mathrm{B}}}\right]$ である。つまり、系全体の初期状態は

$$\hat{\rho}_{\mathrm{init}} := \hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{0,\mathrm{can}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}} \tag{2.52}$$

と書ける。

　はじめに、時刻 t_{init} から時刻 t_{fin} までユニタリー演算子

$$\hat{U} := \mathcal{T}\exp\left[\frac{1}{i\hbar}\int_{t_{\mathrm{init}}}^{t_{\mathrm{fin}}} \hat{H}_{\mathrm{tot}}(t)dt\right] \tag{2.53}$$

を用いて系全体を時間発展させる。ただし、$\mathcal{T}$ は時間順序演算子である。その後、射影演算子

$$\hat{D}_k := \hat{I}^{\mathrm{S}} \otimes \hat{\Pi}_k \otimes \hat{I}^{\mathrm{B}} \tag{2.54}$$

で測定を行う。ここで、$\hat{I}^{\mathrm{S}}, \hat{I}^{\mathrm{B}}$ はそれぞれ系 S と熱浴 B での恒等演算子である。このときの測定結果を k とする。

　この過程で測定結果が k である確率は

$$p(k) = \mathrm{Tr}\left[\hat{D}_k\hat{U}\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\hat{U}^{\dagger}\hat{D}_k\right] \tag{2.55}$$

である。そのときの終状態は

$$\hat{\rho}^{(k)}_{\mathrm{fin}} := \frac{1}{p(k)}\hat{D}_k\hat{U}\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\hat{U}^{\dagger}\hat{D}_k \tag{2.56}$$

であり、そのアンサンブル平均は

$$\hat{\rho}_{\mathrm{fin}} := \sum_{k=1}^{N}\hat{\rho}^{(k)}_{\mathrm{fin}} = \sum_{k=1}^{N}\hat{D}_k\hat{U}\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\hat{U}^{\dagger}\hat{D}_k \tag{2.57}$$

である。ここで、式 (2.56) は各々の k について直交していることに注意する。つまり、$k \neq k'$ のとき

$$\hat{\rho}^{(k)}_{\mathrm{fin}}\hat{\rho}^{(k')}_{\mathrm{fin}} = 0 \tag{2.58}$$

である。この測定過程に対応する量子オペレーションを $\mathcal{E}_k$ とすると

$$\mathcal{E}_k\left(\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}}\right) := \mathrm{Tr}_{\mathrm{MB}}\left[\hat{D}_k\hat{U}\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\hat{U}^{\dagger}\hat{D}_k\right] = \mathrm{Tr}_{\mathrm{MB}}\left[\hat{D}_k\hat{U}\left(\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{0,\mathrm{can}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}\right)\hat{U}^{\dagger}\hat{D}_k\right] \tag{2.59}$$

である。また、測定後の系 S と、メモリー M と熱浴 B を合わせた系の状態はそれぞれ

$$\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_k := \frac{1}{p(k)}\mathrm{Tr}_{\mathrm{MB}}\left[\hat{D}_k\hat{U}\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\hat{U}^{\dagger}\hat{D}_k\right] = \mathrm{Tr}_{\mathrm{MB}}\left[\hat{\rho}^{(k)}_{\mathrm{fin}}\right] \tag{2.60}$$

$$\hat{\rho}^{\mathrm{MB}}_k := \mathrm{Tr}_{\mathrm{S}}\left[\hat{\rho}^{(k)}_{\mathrm{fin}}\right] \tag{2.61}$$

である。

このとき、観測過程についての第二法則

$$W^{\mathrm{M}}_{\mathrm{meas}} \geq \Delta F^{\mathrm{M}} - \beta^{-1}\left(H - I_{\mathrm{QC}}\right) \tag{2.62}$$

が導かれる。ここで、$W^{\mathrm{M}}_{\mathrm{meas}}$ はこの過程でメモリー M がされた仕事、ΔF^{M} は自由エネルギーの変化、H は測定結果 k に対する Shannon エントロピー、I_{QC} は QC-相互情報量でそれぞれ

$$W^{\mathrm{M}}_{\mathrm{meas}} := \sum_{k=1}^{N} p(k)\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}^{\mathrm{MB}}_{k}\left(\hat{H}^{\mathrm{M}}_{k} + \hat{H}^{\mathrm{B}}\right)\right] - \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{0,\mathrm{can}}\hat{H}^{\mathrm{M}}_{0}\right] - \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}\hat{H}^{\mathrm{B}}\right], \tag{2.63}$$

$$\Delta F^{\mathrm{M}} := \sum_{k=1}^{N} p(k)F^{\mathrm{M}}_{k} - F^{\mathrm{M}}_{0}, \tag{2.64}$$

$$I_{\mathrm{QC}} := I_{\mathrm{QC}}\left(\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}}, \mathcal{E}_{k}\right) = S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}}\right) - \sum_{k=1}^{N} p(k)S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{k}\right), \tag{2.65}$$

$$H := -\sum_{k=1}^{N} p(k)\log p(k) \tag{2.66}$$

である。

式 (2.62) はこれは以下のようにして導かれる：全系の von Neumann エントロピーの変化

$$S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}}\right) - S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{fin}}\right) \tag{2.67}$$

を考える。

まず、von Neumann エントロピーは射影測定により増加するので、式 (2.67) の上限は

$$S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}}\right) - S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{fin}}\right) \leq 0 \tag{2.68}$$

と書ける。

次に、終状態の von Neumann エントロピーは $\hat{\rho}^{(k)}_{\mathrm{fin}}$ の直交性と von Neumann エントロピーの劣加法性 [1] により

$$S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{fin}}\right) = H + \sum_{k=1}^{N} p(k)S\left(\hat{\rho}^{(k)}_{\mathrm{fin}}\right) \leq H + \sum_{k=1}^{N} p(k)\left[S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{k}\right) + S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{MB}}_{k}\right)\right] \tag{2.69}$$

と書ける。よって、式 (2.67) の下限は

$$\begin{aligned} &S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}}\right) - S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{fin}}\right) \\ &\qquad \geq S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}}\right) + S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{0,\mathrm{can}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}\right) - H - \sum_{k=1}^{N} p(k)\left[S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{k}\right) + S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{MB}}_{k}\right)\right] &(2.70) \\ &\qquad = -H + I_{\mathrm{QC}} + S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{0,\mathrm{can}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}\right) - \sum_{k=1}^{N} p(k)S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{MB}}_{k}\right) &(2.71) \end{aligned}$$

である。ここで、式 (2.71) の右辺第三項と第四項の下限は、式 (2.35) より

$$
\begin{aligned}
S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{0,\mathrm{can}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}\right) - \sum_{k=1}^{N} p(k) S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{MB}}_{k}\right) & \\
&\geq S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{0,\mathrm{can}}\right) + S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}\right) + \sum_{k=1}^{N} p(k) \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}^{\mathrm{MB}}_{k} \log\left(\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{k,\mathrm{can}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}\right)\right] && (2.72)\\
&= -\beta\left(W^{\mathrm{M}}_{\mathrm{meas}} - \Delta F^{\mathrm{M}}\right) && (2.73)
\end{aligned}
$$

と書ける。よって、式 (2.68)、(2.71)、(2.73) より

$$
0 \geq -H + I_{\mathrm{QC}} - \beta\left(W^{\mathrm{M}}_{\mathrm{meas}} - \Delta F^{\mathrm{M}}\right) \tag{2.74}
$$

が成り立ち。したがって、測定過程の第二法則 (2.62) が導かれる。

2.5 情報消去過程についての情報熱力学第二法則

ここでは情報消去過程に対する情報熱力学第二法則 (2.3) を導く [9]。メモリーは、測定過程と同様に節 2.3 で設定したものを使用する。メモリー M と熱浴 B が接触しながら時間発展し、メモリー M の終状態の測定結果が $k = 0$ になるような過程を考える。ただし、過程の始まりと終わりでメモリー M と熱浴 B は接触していないとする。

メモリー M と 熱浴 B のハミルトニアンをそれぞれ $\hat{H}^{\mathrm{M}}(t)$ と $\hat{H}^{\mathrm{B}}$ 、相互作用ハミルトニアンを $\hat{H}^{\mathrm{MB}}(t)$ としたとき、系全体のハミルトニアンは

$$
\hat{H}(t) := \hat{H}^{\mathrm{M}}(t) + \hat{H}^{\mathrm{M}} + \hat{H}^{\mathrm{MB}}(t) \tag{2.75}
$$

となる。ただし、過程の始まりと終わりの時刻をそれぞれ t_{init} と t_{fin} としたとき、

$$
\hat{H}^{\mathrm{M}}\left(t_{\mathrm{init}}\right) = \hat{H}^{\mathrm{M}}\left(t_{\mathrm{fin}}\right) = \sum_{k=1}^{N} \hat{H}^{\mathrm{M}}_{k}, \tag{2.76}
$$

$$
\hat{H}^{\mathrm{MB}}\left(t_{\mathrm{init}}\right) = \hat{H}^{\mathrm{MB}}\left(t_{\mathrm{fin}}\right) = 0 \tag{2.77}
$$

となるようにする。このときの時間発展演算子は

$$
\hat{U} := \mathcal{T} \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \int_{t_{\mathrm{init}}}^{t_{\mathrm{fin}}} \hat{H}(t) dt\right) \tag{2.78}
$$

である。

メモリー M の初期状態は、各測定結果 k についての逆温度 β における混合状態

$$
\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{init}} := \sum_{k=1}^{N} p(k) \hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{k,\mathrm{can}} \tag{2.79}
$$

とする。ただし、$p(k)$ は式 (2.55) で与えられる。熱浴 B は逆温度 β のカノニカル分布

$$\hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}} := \frac{e^{-\beta \hat{H}^{\mathrm{B}}}}{Z^{\mathrm{B}}} \tag{2.80}$$

とする。ただし、$Z^{\mathrm{B}} := \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta \hat{H}^{\mathrm{B}}}\right]$ である。つまり、全系の初期密度行列は

$$\hat{\rho}_{\mathrm{init}} := \hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{init}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}} = \sum_{k=1}^{N} p(k) \hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{k,\mathrm{can}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}} \tag{2.81}$$

である。また、この過程で系は時間発展演算子 $\hat{U}$ で時間発展するので、終状態の密度行列は

$$\hat{\rho}_{\mathrm{fin}} := \hat{U} \hat{\rho}_{\mathrm{init}} \hat{U}^{\dagger} \tag{2.82}$$

となる。

　このとき、情報消去過程の第二法則

$$W^{\mathrm{M}}_{\mathrm{eras}} \geq -\Delta F^{\mathrm{M}} + \beta^{-1} H \tag{2.83}$$

が導かれる。ここで、 $W^{\mathrm{M}}_{\mathrm{eras}}$ はこの過程でメモリー M にされた仕事で

$$W^{\mathrm{M}}_{\mathrm{eras}} := \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{\mathrm{fin}}\left(\hat{H}^{\mathrm{M}}_{0} + \hat{H}^{\mathrm{B}}\right)\right] - \sum_{k=1}^{N} p(k) \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{k,\mathrm{can}} \hat{H}^{\mathrm{M}}_{k}\right] - \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}} \hat{H}^{\mathrm{B}}\right] \tag{2.84}$$

となる。また、H と ΔF^{M} はそれぞれ式 (2.66)、(2.64) で与えられる。

　以下で式 (2.83) を導く。上の情報消去過程で変化した von Neumann エントロピーは、式 (2.35) より

$$\begin{aligned} & S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\right) - S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{fin}}\right) \\ & \qquad \geq S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\right) + \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{\mathrm{fin}} \log\left(\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{0,\mathrm{can}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}\right)\right] && (2.85) \\ & \qquad = H + \sum_{k=1}^{N} p(k) S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{k,\mathrm{can}}\right) + S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}\right) + \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{\mathrm{fin}} \log\left(\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{0,\mathrm{can}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}\right)\right] && (2.86) \end{aligned}$$

を満たす。ここで、右辺第二項、第三項、第四項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} p(k) S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{k,\mathrm{can}}\right) &= \beta \sum_{k=1}^{N} p(k) \left\{\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{k,\mathrm{can}} \hat{H}^{\mathrm{M}}_{k}\right] - F^{\mathrm{M}}_{k}\right\} && (2.87) \\ S\left(\hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}\right) &= \beta \left\{\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{can}} \hat{H}^{\mathrm{B}}\right] + \log Z^{\mathrm{B}}\right\} && (2.88) \\ \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{\mathrm{fin}} \log\left(\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{0,\mathrm{can}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}\right)\right] &= -\beta \left\{\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_{\mathrm{fin}}\left(\hat{H}^{\mathrm{M}}_{0} + \hat{H}^{\mathrm{B}}\right)\right] - F^{\mathrm{M}}_{0} + \log Z^{\mathrm{B}}\right\} && (2.89) \end{aligned}$$

となるので、式 (2.86) は

$$S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\right) - S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{fin}}\right) \geq H - \beta\left(W^{\mathrm{M}}_{\mathrm{eras}} + \Delta F^{\mathrm{M}}\right) \tag{2.90}$$

と書ける。一方、von Neumann エントロピーのユニタリー不変性から、

$$S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{fin}}\right)=S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{init}}\right) \tag{2.91}$$

が成り立つので、式 (2.90) は

$$0 \geq H-\beta\left(W_{\mathrm{eras}}^{\mathrm{M}}+\Delta F^{\mathrm{M}}\right) \tag{2.92}$$

となる。したがって、情報消去過程の第二法則 (2.83) が導かれる。

■コメント　測定過程の第二法則 (2.62) と情報消去過程の第二法則 (2.83) を合わせると

$$W_{\mathrm{meas}}^{\mathrm{M}}+W_{\mathrm{eras}}^{\mathrm{M}} \geq \beta^{-1} I_{\mathrm{QC}} \tag{2.93}$$

となる。これは測定から情報消去までにかかるエネルギーコストが Shannon エントロピーや自由エネルギーによらず、系 S とメモリー M の間の相互情報量だけで制限されていることを表している。つまり、情報熱力学で重要な情報量は Shannon エントロピーではなく、相互情報量であることを示している。

第 3 章

フィーバック過程での量子 Jarzynski 等式

情報処理を含む Jarzynski 等式やゆらぎの定理は、古典的な系について積極的に研究され、情報と熱力学の間の関係について深い理解を与えてきた [12–15,20,21,25,27]。しかし、量子系については古典的な場合ほど研究されてない [16,22,26]。

この章では、測定誤差がない場合と古典的な誤差がある場合に、フィードバック過程についての量子 Jarzynski 等式 [16] を導く。

3.1　測定誤差なしのフィードバック

まず、誤差なしのフィードバック過程を考える。系は孤立した量子系 S で、ハミルトニアンは外部から操作できるパラメータを持っているとする。

系 S の初期ハミルトニアンを $\hat{H}^{(0)}$ し、その固有値と対応する固有射影演算子をそれぞれ $E_i^{(0)}$ と $\hat{P}_i^{(0)}$ とする。初期状態は逆温度 β のカノニカル分布

$$\hat{\rho}_{\rm can}^{(0)} := \frac{e^{-\beta \hat{H}^{(0)}}}{Z_0} = \sum_i \frac{e^{-\beta E_i^{(0)}}}{Z_0} \hat{P}_i^{(0)} \tag{3.1}$$

とする。ここで、$Z_0 := \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta \hat{H}^{(0)}}\right]$ とする。また、このときの自由エネルギーは $F^{(0)} := -\beta^{-1} \log Z_0$ である。

まず、エネルギー $\hat{H}^{(0)}$ の固有射影演算子の組 $\left\{\hat{P}_i^{(0)}\right\}_i$ で系 S エネルギーを測定し、その測定結果を $E_i^{(0)}$ または簡単に i とする。次に、系 S をユニタリー演算子 $\hat{U}$ で時間発展させる。その後、任意の射影演算子の組 $\left\{\hat{Q}_j\right\}_j$ で系 S を測定し、その測定結果を j とする。測定終了後、測定結果 j に依存するユニタリー演算子 $\hat{U}_j$ でフィードバックコントロールを行う。フィードバックコントロールにより、系 S のハミルトニアンは測定結果 j に依存する。最後に、測定結

果 j に依存する終状態のハミルトニアン $\hat{H}^{(j)}$ の固有射影演算子の組 $\left\{\hat{P}_k^{(j)}\right\}_k$ で系 S のエネルギーを測定し、その測定結果を $E_k^{(j)}$ または簡単に k とする。また、終状態のハミルトニアン $\hat{H}^{(j)}$ に対応する逆温度 β のカノニカル分布を

$$\hat{\rho}_{\mathrm{can}}^{(j)} := \frac{e^{-\beta \hat{H}^{(j)}}}{Z_j} = \sum_k \frac{e^{-\beta E_k^{(j)}}}{Z_j} \hat{P}_k^{(j)} \tag{3.2}$$

とし、そのときの自由エネルギーを $F^{(j)} := -\beta^{-1} \log Z_j$ とする。ただし、$Z_j := \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta \hat{H}^{(j)}}\right]$ である。

この過程で測定結果 i, j, k が得られる確率は

$$p(i,j,k) := \frac{e^{-\beta E_i^{(0)}}}{Z_0} \mathrm{Tr}\left[\hat{P}_k^{(j)} \hat{U}_j \hat{Q}_j \hat{U} \hat{P}_i^{(0)} \hat{U}^\dagger \hat{Q}_j \hat{U}_j^\dagger \hat{P}_k^{(j)}\right] \tag{3.3}$$

で与えられる。確率 $p(i,j,k)$ の期待値を

$$\langle f(i,j,k) \rangle_p := \sum_{i,j,k} f(i,j,k)\, p(i,j,k) \tag{3.4}$$

と定義する。ここで、$f(i,j,k)$ は i, j, k の任意の関数である。また、この過程で系 S にされた仕事と自由エネルギーはそれぞれ

$$w_{i,j,k} := E_i^{(0)} - E_k^{(j)}, \tag{3.5}$$

$$\Delta F_j := F^{(j)} - F^{(0)} \tag{3.6}$$

である。

このとき、

$$\left\langle \exp\left[\beta\left(w_{i,j,k} + \Delta F_j\right)\right]\right\rangle_p = \gamma \tag{3.7}$$

が得られる [16]。ただし、

$$\gamma := \sum_j \mathrm{Tr}\left[\hat{Q}_j \hat{U}_j^\dagger \hat{\rho}_{\mathrm{can}}^{(j)} \hat{U}_j \hat{Q}_j\right] \tag{3.8}$$

である。量 γ は沙川と上田によって導入させたフィードバックの効率を表す量 [12] に対応する量である。式 (3.8) から明らかなように、終状態の熱平衡状態 $\hat{\rho}_{\mathrm{can}}^{(j)}$ から逆時間発展し、その時状態を射影測定 $\hat{Q}_j$ で測定して得られる。

以下で式 (3.7) を導く：$\sum_i \hat{P}_i^{(0)} = 1$ とトレースの性質より

$$\left\langle \exp\left[\beta\left(w_{i,j,k}+\Delta F_j\right)\right]\right\rangle_p = \sum_{i,j,k}\frac{e^{-\beta E_k^{(j)}}}{Z_j}\mathrm{Tr}\left[\hat{P}_k^{(j)}\hat{U}_j\hat{Q}_j\hat{U}\hat{P}_i^{(0)}\hat{U}^\dagger\hat{Q}_j\hat{U}_j^\dagger\hat{P}_k^{(j)}\right]$$
$$= \sum_{j,k}\frac{e^{-\beta E_k^{(j)}}}{Z_j}\mathrm{Tr}\left[\hat{P}_k^{(j)}\hat{U}_j\hat{Q}_j\hat{U}_j^\dagger\hat{P}_k^{(j)}\right]$$
$$= \sum_{j,k}\frac{e^{-\beta E_k^{(j)}}}{Z_j}\mathrm{Tr}\left[\hat{Q}_j\hat{U}_j^\dagger\hat{P}_k^{(j)}\hat{U}_j\hat{Q}_j\right] \tag{3.9}$$

式 (3.2) より右辺は式 (3.8) の γ に等しい。よって、式 (3.7) が導かれる。

■コメント　Jensen の不等式

$$\left\langle e^f\right\rangle \geq e^{\langle f\rangle} \tag{3.10}$$

を用いると、式 (3.7) から

$$\left\langle w_{i,j,k}\right\rangle_p \leq -\left\langle \Delta F_j\right\rangle_p + \beta^{-1}\log\gamma \tag{3.11}$$

が得られる。この不等式から量 γ は $\gamma > 1$ のとき、従来の熱力学を超える仕事を取り出せ、$\gamma < 1$ のときは従来の熱力学よりも少ない仕事しか取り出せないことがわかる。このことは量 γ がフィードバックの効率を表す量であることを示している。

3.2　古典的な誤差を含むフィードバック

次に、古典的な誤差がある場合のフィードバック過程を考える。節 3.1 の過程との違いは、中間の測定で古典的な誤差が入る点である。つまり、中間の測定 $\left\{\hat{Q}_j\right\}_j$ の測定結果 j を、条件付き確率 $\varepsilon(j'|j)$ で測定結果 j' に間違えるとする。フィードバックコントロールは間違えた測定結果 j' に従って行う。節 3.1 の誤差がない過程は $\varepsilon(j'|j) = \delta_{j',j}$ の場合に対応する。

古典的な誤差がある場合、節 3.1 の確率 (3.3) は

$$\tilde{p}(i,j,j',k) := \frac{e^{-\beta E_i^{(0)}}}{Z_0}\mathrm{Tr}\left[\hat{P}_k^{(j')}\hat{U}_{j'}\hat{Q}_j\hat{U}\hat{P}_i^{(0)}\hat{U}^\dagger\hat{Q}_j\hat{U}_{j'}^\dagger\hat{P}_k^{(j')}\right]\varepsilon\left(j'|j\right) \tag{3.12}$$

に、期待値 (3.4) は

$$\left\langle f\left(i,j,j',k\right)\right\rangle_{\tilde{p}} := \sum_{i,j,j',k} f\left(i,j,j',k\right)\tilde{p}\left(i,j,j',k\right) \tag{3.13}$$

に変更される。ここで、 $f(i,j,j',k)$ は i,j,j',k の任意の関数である。また、測定結果 j 、測

定結果 j' 、測定結果の組 (j,j') を得られる確率をそれぞれ

$$\tilde{p}_2\left(j\right) := \sum_{i,j',k} \tilde{p}\left(i,j,j',k\right), \tag{3.14}$$

$$\tilde{p}_3\left(j'\right) := \sum_{i,j,k} \tilde{p}\left(i,j,j',k\right), \tag{3.15}$$

$$\tilde{p}_{2,3}\left(j,j'\right) := \sum_{i,k} \tilde{p}\left(i,j,j',k\right) \tag{3.16}$$

と定義する。これらには $\tilde{p}_{2,3}\left(j,j'\right) = \tilde{p}_2\left(j\right)\varepsilon\left(j'|j\right)$ という関係がある。このとき、（平均してない）相互情報量を

$$I_{j,j'} := \log\frac{\varepsilon\left(j'|j\right)}{\tilde{p}_3\left(j'\right)} = \log\frac{\tilde{p}_{2,3}\left(j,j'\right)}{\tilde{p}_2\left(j\right)\tilde{p}_3\left(j'\right)} \tag{3.17}$$

と定義する。この期待値は古典的な相互情報量

$$\left\langle I_{j,j'}\right\rangle_{\tilde{p}} = \sum_{j,j'} \tilde{p}_{2,3}\left(j,j'\right)\log\frac{\tilde{p}_{2,3}\left(j,j'\right)}{\tilde{p}_2\left(j\right)\tilde{p}_3\left(j'\right)} \tag{3.18}$$

となる。

以上の過程について、古典的なエラーを含むときのフィードバック過程での量子 Jarzynski 等式

$$\left\langle \exp\left[\beta\left(w_{i,j',k} + \Delta F_{j'} - I_{j,j'}\right)\right]\right\rangle_{\tilde{p}} = 1, \tag{3.19}$$

$$\left\langle \exp\left[\beta\left(w_{i,j',k} + \Delta F_{j'}\right)\right]\right\rangle_{\tilde{p}} = \tilde{\gamma} \tag{3.20}$$

が得られる [16]。ここで、

$$\tilde{\gamma} := \sum_{j,j'} \varepsilon(j'|j)\mathrm{Tr}\left[\hat{Q}_j\hat{U}^\dagger_{j'}\hat{\rho}^{(j')}_{\mathrm{can}}\hat{U}_{j'}\hat{Q}_j\right] \tag{3.21}$$

である。量 $\tilde{\gamma}$ は式 (3.8) と同様に、沙川、上田が Ref. [12] で導入した量に対応しており、フィードバックの効率を表す。この量 $\tilde{\gamma}$ は $\varepsilon\left(j'|j\right) = \delta_{j',j}$ のとき式 (3.8) の量が γ と一致する。

式 (3.19) と (3.20) は以下のようにして導ける：まず、$\sum_i \hat{P}^{(0)}_i = 1$ と $\sum_j \hat{Q}_j = 1$ より

$$\begin{aligned}
\left\langle \exp\left[\beta\left(w_{i,j',k} + \Delta F_{j'} - I_{j,j'}\right)\right]\right\rangle_{\tilde{p}} &= \sum_{i,j,j',k} \frac{e^{-\beta E^{(j')}_k}}{Z_{j'}}\tilde{p}_3\left(j'\right)\mathrm{Tr}\left[\hat{P}^{(j')}_k\hat{U}_{j'}\hat{Q}_j\hat{U}\hat{P}^{(0)}_i\hat{U}^\dagger\hat{Q}_j\hat{U}^\dagger_{j'}\hat{P}^{(j')}_k\right] \\
&= \sum_{j,j',k} \frac{e^{-\beta E^{(j')}_k}}{Z_{j'}}\tilde{p}_3\left(j'\right)\mathrm{Tr}\left[\hat{P}^{(j')}_k\hat{U}_{j'}\hat{Q}_j\hat{U}^\dagger_{j'}\hat{P}^{(j')}_k\right] \\
&= \sum_{j',k} \frac{e^{-\beta E^{(j')}_k}}{Z_{j'}}\tilde{p}_3\left(j'\right)\mathrm{Tr}\left[\hat{P}^{(j')}_k\right] \\
&= \sum_{j'} \tilde{p}_3\left(j'\right)\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}^{(j')}_{\mathrm{can}}\right] = 1
\end{aligned} \tag{3.22}$$

となり、式 (3.19) が導かれる。式 (3.20) は節 3.1 の式 (3.9) と同様に導くことができる。

■**コメント**　式 (3.19) に Jensen の不等式 (3.10) を用いると、

$$\left\langle w_{i,j',k} \right\rangle_{\tilde{p}} \leq -\left\langle \Delta F_{j'} \right\rangle_{\tilde{p}} + \beta^{-1} \left\langle I_{j,j'} \right\rangle_{\tilde{p}} \tag{3.23}$$

が得られる。これはフィードバック過程の第二法則 (2.1) と同じ形をしている。しかし、ここでの $\left\langle I_{j,j'} \right\rangle$ は QC-相互情報量ではなく古典的な相互情報量であることに注意する必要がある。

第 4 章

測定過程と情報消去過程の量子 Jarzynski 等式

第 3 章のフィードバック過程に続き、この章では測定過程と情報消去過程についての量子 Jarzynski 等式 [30] を導く。この Jarzynski 等式はそれぞれ、節 2.4 と節 2.5 で述べた不等式に対応する等式である。等式からそれぞれの過程における第二法則 (2.2) と (2.3) を導くことができる。

4.1 測定過程の量子 Jarzynski 等式

ここでは、測定過程を考え、節 2.4 の第二法則 (2.2) に対応する Jarzynski 等式を導く。熱力学的な系 S 、メモリー M、熱浴 B を考え、系全体は孤立量子系となっている。メモリー M は節 2.3 で設定したものを用いる。熱力学的な系 S はメモリー M と相互作用することにより測定され、その測定結果はメモリー M に蓄えられるとする。また、メモリー M と熱浴 B も相互作用するとする。ただし、熱力学的な系 S と熱浴 B は直接相互作用はしない。

この過程は時刻 $t = t_0$ で始まり、時刻 $t = t_1$ で終わるとする。系 S 、メモリー M 、熱浴 B のハミルトニアンをそれぞれ $\hat{H}^{\mathrm{S}}(t)$ 、 $\hat{H}^{\mathrm{M}}(t)$ 、 $\hat{H}^{\mathrm{B}}$ とし、S と M 、M と B の間の相互作用ハミルトニアンをそれぞれ $\hat{H}^{\mathrm{SM}}(t)$ と $\hat{H}^{\mathrm{MB}}(t)$ とする。このとき、系全体のハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{tot}}(t) := \hat{H}^{\mathrm{S}}(t) + \hat{H}^{\mathrm{M}}(t) + \hat{H}^{\mathrm{B}} + \hat{H}^{\mathrm{SM}}(t) + \hat{H}^{\mathrm{MB}}(t) \tag{4.1}$$

となる。ただし、

$$\hat{H}^{\mathrm{SM}}(t_0) = \hat{H}^{\mathrm{SM}}(t_1) = 0, \tag{4.2}$$

$$\hat{H}^{\mathrm{MB}}(t_0) = \hat{H}^{\mathrm{MB}}(t_1) = 0, \tag{4.3}$$

$$\hat{H}^{\mathrm{M}}(t_0) = \hat{H}^{\mathrm{M}}(t_1) = \sum_a \hat{H}^{\mathrm{M}}_a \tag{4.4}$$

であるとする。

系全体の初期状態は 系 S 、メモリー M 、熱浴 B それぞれの初期状態 $\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}}$ 、 $\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{init}}$ 、 $\hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}$ の直積

$$\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{init}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}} \tag{4.5}$$

で書けるとする。系 S の初期状態 $\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}}$ は非ゼロの固有値 $q(i)$ を持ち、その固有状態を $|\phi_i\rangle$ とする。また、 $|\phi_i\rangle$ への射影を $\hat{\Phi}_i$ する。このとき、初期状態は

$$\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}} := \sum_i q(i)\hat{\Phi}_i \tag{4.6}$$

となる。メモリー M の初期状態は測定結果 a が確率 $p_{\mathrm{init}}(a)$ で蓄えられた逆温度 β のカノニカル分布を考える。つまり、

$$\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{init}} := \sum_a p_{\mathrm{init}}(a)\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{a,\mathrm{can}} \tag{4.7}$$

である。注意として、節 2.4 ではメモリーの初期状態は誤差なしの場合

$$p_{\mathrm{init}}(a) = \delta_{a,0} \tag{4.8}$$

としているが、ここでの初期状態はメモリー M が確率 $p_{\mathrm{init}}(a)$ の誤差を持つ場合を考えている。B の初期状態は逆温度 β のカノニカル分布する。つまり、

$$\hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}} := \frac{e^{-\beta \hat{H}^{\mathrm{B}}}}{Z^{\mathrm{B}}} = \sum_k \frac{e^{-\beta E^{\mathrm{B}}_k}}{Z^{\mathrm{B}}} \hat{P}^{\mathrm{M}}_k \tag{4.9}$$

である。ただし、$Z^{\mathrm{B}} := \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta \hat{H}^{\mathrm{B}}}\right]$ であり、E^{B}_k と $\hat{P}^{\mathrm{M}}_k$ はエネルギー固有値とそれに対応する射影演算子である。

次のような測定過程を考える：

■Step 1 初期状態　系全体の初期状態を $\hat{\rho}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{init}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{init}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}$ とする。

■Step 2 メモリー M の状態の固定　射影演算子 $\hat{\Pi}_a$ で測定し、メモリー M の状態を固定する。そのときの測定結果を a とする。

■Step 3 エネルギーの測定　メモリー M と熱浴 B のエネルギーを測定する。エネルギーの射影演算子 $\hat{P}^{\mathrm{M}}_{n_a}$ と $\hat{P}^{\mathrm{B}}_k$ でメモリー M と B を測定し、エネルギー $E^{\mathrm{M}}_{n_a}$ と E^{B}_k を得る。射影演算子 $\hat{\Pi}_a$ と $\hat{P}^{\mathrm{M}}_{n_a}$ の間には

$$\hat{\Pi}_a \hat{P}^{\mathrm{M}}_{n_a} = \hat{P}^{\mathrm{M}}_{n_a} \hat{\Pi}_a = \hat{P}^{\mathrm{M}}_{n_a} \tag{4.10}$$

という関係があることに注意する。

■Step 4 相互作用 相互作用させる。系全体をユニタリー演算子

$$\hat{U} := \mathcal{T}\exp\left[\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t_a}\hat{H}_{\mathrm{tot}}(t)dt\right] \tag{4.11}$$

で時間発展させる。ただし、$\mathcal{T}$ は時間順所演算子である。

■Step 5 メモリー M の状態を測定 メモリー M を射影演算子 $\hat{\Pi}_b$ で測定し、測定結果 b を得る。このとき、系 S の状態は

$$\hat{\rho}_b^{\mathrm{S}} := \frac{1}{p_{\mathrm{meas}}(b)}\mathrm{Tr}_{\mathrm{MB}}\left[\left(\hat{I}^{\mathrm{S}}\otimes\hat{\Pi}_b\otimes\hat{I}^{\mathrm{B}}\right)\hat{U}\left(\hat{\rho}_{\mathrm{init}}^{\mathrm{S}}\otimes\hat{\rho}_{\mathrm{init}}^{\mathrm{M}}\otimes\hat{\rho}_{\mathrm{can}}^{\mathrm{B}}\right)\hat{U}^{\dagger}\left(\hat{I}^{\mathrm{S}}\otimes\hat{\Pi}_b\otimes\hat{I}^{\mathrm{B}}\right)\right] \tag{4.12}$$

となる。ここで、

$$p_{\mathrm{meas}}(b) := \mathrm{Tr}\left[\left(\hat{I}^{\mathrm{S}}\otimes\hat{\Pi}_b\otimes\hat{I}^{\mathrm{B}}\right)\hat{U}\left(\hat{\rho}_{\mathrm{init}}^{\mathrm{S}}\otimes\hat{\rho}_{\mathrm{init}}^{\mathrm{M}}\otimes\hat{\rho}_{\mathrm{can}}^{\mathrm{B}}\right)\hat{U}^{\dagger}\left(\hat{I}^{\mathrm{S}}\otimes\hat{\Pi}_b\otimes\hat{I}^{\mathrm{B}}\right)\right] \tag{4.13}$$

は測定結果 b を得る確率である。また、この $\hat{\rho}_b^{\mathrm{S}}$ の固有状態とその固有値を $|\psi_{j_b}\rangle, \tilde{q}(j_b)$ とする。このときの状態 $|\psi_{j_b}\rangle$ への射影を $\hat{\Psi}_{j_b}$ とする。

■Step 6 エネルギーの測定 メモリー M と熱浴 B のエネルギーを測定する。エネルギー射影演算子 $\hat{P}_{n_b}^{\mathrm{M}}$ と $\hat{P}_l^{\mathrm{B}}$ でメモリー M と熱浴 B を測定し、エネルギー $E_{n_b}^{\mathrm{M}}$ と E_l^{B} を得る。

この過程で、S が初期状態 $|\phi_i\rangle$ から 測定後の状態 $|\psi_{j_b}\rangle$ に変化し、全測定結果が (a, n_a, k, b, n_b, l) である確率は

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{all}}\left(a, i, n_a, k, b, j_b, n_b, l\right) &:= q(i)p_{\mathrm{init}}(a)\frac{e^{-\beta E_{n_a}^{\mathrm{M}}}}{Z_a^{\mathrm{M}}}\frac{e^{-\beta E_k^{\mathrm{B}}}}{Z^{\mathrm{B}}} \\ &\times\mathrm{Tr}\left[\left(\hat{\Psi}_{j_b}\otimes\hat{P}_{n_b}^{\mathrm{M}}\otimes\hat{P}_l^{\mathrm{B}}\right)\hat{U}\left(\hat{\Phi}_i\otimes\hat{P}_{n_a}^{\mathrm{M}}\otimes\hat{P}_k^{\mathrm{B}}\right)\hat{U}^{\dagger}\left(\hat{\Psi}_{j_b}\otimes\hat{P}_{n_b}^{\mathrm{M}}\otimes\hat{P}_l^{\mathrm{B}}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.14}$$

である。この確率の期待値を

$$\langle f\rangle_{\mathrm{m}} := \sum_{a,i,n_a,k,b,j_b,n_b,l} f\left(a, i, n_a, k, b, j_b, n_b, l\right)\, p_{\mathrm{all}}\left(a, i, n_a, k, b, j_b, n_b, l\right) \tag{4.15}$$

と定義する。ここで、$f\left(a, i, n_a, k, b, j_b, n_b, l\right)$ は任意の関数である。

このとき、測定過程のエネルギーコストについての量子 Jarzynski 等式

$$\left\langle\exp\left[-\beta\left(W_{\mathrm{meas}} - \Delta F_{\mathrm{meas}}\right) - \Delta H_{\mathrm{meas}} + I\right]\right\rangle_{\mathrm{m}} = 1 \tag{4.16}$$

が得られる。ここで、 W_{meas} 、ΔF_{meas} 、δH_{meas} 、I はそれぞれ、メモリー M にされた仕事、自由エネルギーの変化、メモリー M が取得した情報量、系 S が失った情報量で、それぞれ

$$W_{\mathrm{meas}}\left(n_a, k, n_b, l\right) := \left(E_{n_b}^{\mathrm{M}} - E_{n_a}^{\mathrm{M}}\right) + \left(E_l^{\mathrm{B}} - E_k^{\mathrm{B}}\right) \tag{4.17}$$

$$\Delta F_{\mathrm{meas}}\left(a, b\right) := F_b^{\mathrm{M}} - F_a^{\mathrm{M}} \tag{4.18}$$

$$\Delta H_{\mathrm{meas}}\left(a, b\right) := -\log p_{\mathrm{meas}}(b) + \log p_{\mathrm{init}}(a) \tag{4.19}$$

$$I\left(i, j_b\right) := -\log q(i) + \log\tilde{q}(j_b) \tag{4.20}$$

である。メモリー M が取得した情報量 ΔH_{meas} と系 S が失った情報量 I は期待値はそれぞれ

$$\langle \Delta H_{\mathrm{meas}} \rangle_{\mathrm{m}} = H\left(\boldsymbol{p}_{\mathrm{meas}}\right) - H\left(\boldsymbol{p}_{\mathrm{init}}\right) \tag{4.21}$$

$$\langle I \rangle_{\mathrm{m}} = S\left(\hat{\rho}_{\mathrm{init}}^{\mathrm{S}}\right) - \sum_b p_{\mathrm{meas}}(b) S\left(\hat{\rho}_b^{\mathrm{S}}\right) \tag{4.22}$$

となる。ここで、$H(\boldsymbol{p}) := -\sum_x p(x)\log p(x)$ は Shannon エントロピー、$S(\hat{\rho}) := -\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\log\hat{\rho}\right]$ は von Neumann エントロピーである。注意として、式 (4.22) は QC-相互情報量 (2.5) を、式 (4.21) は Shannon エントロピーの変化である。

式 (4.16) は以下のように導かれる：$\sum_i \hat{\Phi}_i = 1$,　$\sum_a \sum_{n_a} \hat{P}_{n_a}^{\mathrm{M}} = 1$,　$\sum_k \hat{P}_k^{\mathrm{B}} = 1$ より

$$\begin{aligned}
&\left\langle \exp\left[-\beta\left(W_{\mathrm{meas}} - \Delta F_{\mathrm{meas}}\right) - \Delta H_{\mathrm{meas}} + I\right]\right\rangle_{\mathrm{m}} \\
&= \sum_{a,i,n_a,k,b,j_b,n_b,l} \tilde{q}\left(j_b\right) p_{\mathrm{meas}}(b) \frac{e^{-\beta E_{n_b}^{\mathrm{M}}}}{Z_b^{\mathrm{M}}} \frac{e^{-\beta E_l^{\mathrm{B}}}}{Z^{\mathrm{B}}} \\
&\qquad \times \mathrm{Tr}\left[\left(\hat{\Psi}_{j_b} \otimes \hat{P}_{n_b}^{\mathrm{M}} \otimes \hat{P}_l^{\mathrm{B}}\right) \hat{U} \left(\hat{\Phi}_i \otimes \hat{P}_{n_a}^{\mathrm{M}} \otimes \hat{P}_k^{\mathrm{B}}\right) \hat{U}^{\dagger} \left(\hat{\Psi}_{j_b} \otimes \hat{P}_{n_b}^{\mathrm{M}} \otimes \hat{P}_l^{\mathrm{B}}\right)\right] \\
&= \sum_{b,j_b,n_b,l} \tilde{q}\left(j_b\right) p_{\mathrm{fin}}(b) \frac{e^{-\beta E_{n_b}^{\mathrm{M}}}}{Z_b^{\mathrm{M}}} \frac{e^{-\beta E_l^{\mathrm{B}}}}{Z^{\mathrm{B}}} \mathrm{Tr}\left[\hat{\Psi}_{j_b} \otimes \hat{P}_{n_b}^{\mathrm{M}} \otimes \hat{P}_l^{\mathrm{B}}\right] \\
&= \sum_b p_{\mathrm{meas}}(b) \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}_b^{\mathrm{S}} \otimes \hat{\rho}_{b,\mathrm{can}}^{\mathrm{M}} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{can}}^{\mathrm{B}}\right] = 1
\end{aligned} \tag{4.23}$$

となり、式 (4.16) が導かれる。

■コメント　Jensen の不等式 (3.10) を用いると、式 (4.16) から、測定過程の第二法則

$$\langle W_{\mathrm{meas}} \rangle_{\mathrm{m}} \geq \langle \Delta F_{\mathrm{meas}} \rangle_{\mathrm{m}} - \beta^{-1}\left(\langle \Delta H_{\mathrm{meas}} \rangle_{\mathrm{m}} - \langle I \rangle_{\mathrm{m}}\right) \tag{4.24}$$

が得られる。注意として、式 (4.24) は式 (2.62) の Shannon エントロピー H が Shannon エントロピーの変化 ΔH に置き換わっている。これはメモリー M の初期状態の誤差の有無の違いの現れである。式 (4.24) は誤差なし極限 (4.8) で式 (2.62) に一致する。

4.2　情報消去過程の量子 Jarzynski 等式

次に情報消去過程を考え、節 2.5 の第二法則 (2.83) に対応する Jarzynski 等式を導く。節 2.3 で設定したメモリー M と熱浴 B が全体として孤立量子系となっているとする。メモリー M と熱浴 B は過程の始まりと終わりでは接触していないとする。

この過程は時刻 $t = t_1$ に始まり、時刻 $t = t_2$ に終わるとする。メモリー M と熱浴 B のハミルトニアンをそれぞれ $\hat{H}^{\mathrm{M}}(t)$ と $\hat{H}^{\mathrm{B}}$ とし、M と B の間の相互作用ハミルトニアンは $\hat{H}^{\mathrm{MB}}(t)$ とする。このときの系全体のハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathrm{tot}}(t) := \hat{H}^{\mathrm{M}}(t) + \hat{H}^{\mathrm{B}} + \hat{H}^{\mathrm{MB}}(t) \tag{4.25}$$

となる。ただし、

$$\hat{H}^{\mathrm{MB}}(t_1) = \hat{H}^{\mathrm{MB}}(t_2) = 0, \tag{4.26}$$

$$\hat{H}^{\mathrm{M}}(t_1) = \hat{H}^{\mathrm{M}}(t_2) = \sum_{b=1}^{N} \hat{H}_b^{\mathrm{M}} \tag{4.27}$$

であるとする。

系全体の初期状態はメモリー M と熱浴 B それぞれの初期状態 $\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{meas}}$ と $\hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}$ の直積

$$\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{meas}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}} \tag{4.28}$$

で書けるとする。メモリー M の初期状態は測定結果 b が確率 $\tilde{p}_{\mathrm{meas}}(b)$ で蓄えられた逆温度 β のカノニカル分布を考える。つまり、

$$\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{meas}} := \sum_{b=1}^{N} \tilde{p}_{\mathrm{meas}}(b) \hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{b,\mathrm{can}} \tag{4.29}$$

である。熱浴 B の初期状態 $\hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}$ は逆温度 β のカノニカル分布とする。つまり、

$$\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{can}} := \frac{e^{-\beta \hat{H}^{\mathrm{B}}}}{Z^{\mathrm{B}}} = \sum_r \frac{e^{-\beta E_r^{\mathrm{B}}}}{Z^{\mathrm{B}}} \hat{P}_r^{\mathrm{M}} \tag{4.30}$$

である。ただし、$Z^{\mathrm{B}} := \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta \hat{H}^{\mathrm{B}}}\right]$ であり、E_r^{B} と $\hat{P}_r^{\mathrm{M}}$ はエネルギー固有値とそれに対応する射影演算子である。

以下のような過程を考える：

■Step 1 初期状態　系全体の初期状態を $\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{meas}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}$ とする。

■Step 2 メモリー M の状態の固定　射影演算子 $\hat{\Pi}_b$ で測定し、メモリー M の状態を固定する。そのときの測定結果を b とする。

■Step 3 エネルギーの測定　メモリー M と熱浴 B のエネルギーを測定する。エネルギーの射影演算子 $\hat{P}^{\mathrm{M}}_{n_b}$ と $\hat{P}^{\mathrm{B}}_r$ でメモリー M と熱浴 B を測定し、それぞれエネルギー $E^{\mathrm{M}}_{n_b}$ と E^{B}_r を得る。

■Step 4 相互作用　相互作用させる。系全体をユニタリー演算子

$$\hat{U}_{\mathrm{eras}} := \mathcal{T} \exp\left[\frac{1}{i\hbar} \int_{t_1}^{t_2} \hat{H}_{\mathrm{tot}}(t) dt\right] \tag{4.31}$$

で時間発展させる。ただし、$\mathcal{T}$ は時間順所演算子である。

■Step 5 メモリー M の状態を測定　メモリー M を射影演算子 $\hat{\Pi}_c$ で測定し、測定結果 c を得る。このとき、測定結果 c が得られる確率は

$$p_{\mathrm{eras}}(c) := \mathrm{Tr}\left[\left(\hat{\Pi}_c \otimes \hat{I}^{\mathrm{B}}\right) \hat{U}_{\mathrm{eras}} \left(\hat{\rho}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{meas}} \otimes \hat{\rho}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{can}}\right) \hat{U}^{\dagger}_{\mathrm{eras}} \left(\hat{\Pi}_c \otimes \hat{I}^{\mathrm{B}}\right)\right] \tag{4.32}$$

で与えられる。

■**Step 6 エネルギーの測定**　メモリー M と熱浴 B のエネルギーを測定する。エネルギー射影演算子 $\hat{P}^{\mathrm{M}}_{n_c}$ と $\hat{P}^{\mathrm{B}}_{s}$ で メモリー M と B を測定し、それぞれエネルギー $E^{\mathrm{M}}_{n_c}$ と E^{B}_{s} を得る。

この過程で、全測定結果が (b, n_b, r, c, n_c, s) である確率は

$$\tilde{p}_{\mathrm{all}}\left(b, n_b, r, c, n_c, s\right) := \tilde{p}_{\mathrm{meas}}(b)\frac{e^{-\beta E^{\mathrm{M}}_{n_b}}}{Z^{\mathrm{M}}_{b}}\frac{e^{-\beta E^{\mathrm{B}}_{r}}}{Z^{\mathrm{B}}}\mathrm{Tr}\left[\left(\hat{P}^{\mathrm{M}}_{n_c}\otimes\hat{P}^{\mathrm{B}}_{s}\right)\hat{U}_{\mathrm{meas}}\left(\hat{P}^{\mathrm{M}}_{n_b}\otimes\hat{P}^{\mathrm{B}}_{r}\right)\hat{U}^{\dagger}_{\mathrm{meas}}\left(\hat{P}^{\mathrm{M}}_{n_c}\otimes\hat{P}^{\mathrm{B}}_{s}\right)\right] \tag{4.33}$$

である。この確率の期待値を

$$\langle g\rangle_{\mathrm{e}} := \sum_{b,n_b,r,c,n_c,s} g\left(b, n_b, r, c, n_c, s\right)\ \tilde{p}_{\mathrm{all}}\left(b, n_b, r, c, n_c, s\right) \tag{4.34}$$

と定義する。ここで、$g\left(b, n_b, r, c, n_c, s\right)$ は任意の関数である。

このとき、情報消去過程のエネルギーコストについての量子 Jarzynski 等式

$$\left\langle \exp\left[-\beta\left(W_{\mathrm{eras}} - \Delta F_{\mathrm{eras}}\right) - \Delta H_{\mathrm{eras}}\right]\right\rangle_{\mathrm{e}} = 1 \tag{4.35}$$

が得られる。ここで、W_{eras} 、ΔF_{eras} 、ΔH_{eras} はそれぞれ、メモリー M にされた仕事、自由エネルギーの変化、取得した情報量で

$$W_{\mathrm{eras}}\left(n_b, r, n_c, s\right) := \left(E^{\mathrm{M}}_{n_c} - E^{\mathrm{M}}_{n_b}\right) + \left(E^{\mathrm{B}}_{s} - E^{\mathrm{B}}_{r}\right) \tag{4.36}$$

$$\Delta F_{\mathrm{eras}}\left(a, b\right) := F^{\mathrm{M}}_{c} - F^{\mathrm{M}}_{b} \tag{4.37}$$

$$\Delta H_{\mathrm{eras}}\left(a, b\right) := -\log p_{\mathrm{eras}}(c) + \log \tilde{p}_{\mathrm{meas}}(b) \tag{4.38}$$

である。

これは式 (4.16) と同様に導ける。

■**コメント**　Jensen の不等式 (3.10) を用いると、式 (4.35) から情報消去過程の第二法則

$$\langle W_{\mathrm{eras}}\rangle_{\mathrm{e}} \geq \langle \Delta F_{\mathrm{eras}}\rangle_{\mathrm{e}} - \beta^{-1}\langle \Delta H_{\mathrm{eras}}\rangle_{\mathrm{e}} \tag{4.39}$$

が得られる。この式は節 2.5 で導かれた第二法則 (2.83) と自由エネルギーの差の符号が異なっているように見えるが、これは自由エネルギーの差の定義が節 2.5 と逆になっているためである。式 (4.39) はメモリー M の分布 $\tilde{p}_{\mathrm{meas}}(b)$ が測定過程の測定後の分布であり、$p_{\mathrm{eras}}(c) = \delta_{c,0}$ になるように操作を行うとき、式 (2.83) に一致する。

第 5 章

結び

本論文は第 3 章と第 4 章で、量子系の情報熱力学の Jarzynski 等式を導出した。第 3 章では、誤差なしと古典的な誤差があるフィードバック過程の量子 Jarzynski 等式を導いた。誤差なしのフィードバック過程では孤立した量子系に対して過程の中間に射影測定を行い、その測定結果を用いてフィードバックを行った。また、古典的な誤差があるフィードバック過程では中間の射影測定の結果に対し、条件付き確率を用いて測定結果を変化させ、変化した測定過程を用いてフィードバックを行った。導いた等式は古典的な系で導かれた Jarzynski 等式 [12] と対応している。

第 4 章では、測定過程と情報消去過程についての量子 Jarzynski 等式をそれぞれ導いた。測定過程ではメモリーの初期状態が標準状態から確率的に揺らぐ場合、つまり、メモリーの初期状態に誤差がある場合を考えた。また、情報消去過程ではメモリーの終状態が完全には標準状態に戻らない場合を考えた。これが本論文の定式化で新しい点である。これにより、メモリーが測定で取得する情報量や情報処理で失う情報量は、過程前後の情報量の変化で表される。この事実を敷衍すると、過程によりメモリーの確率分布が変化することを測定や情報消去と見なすという考え方が生まれる。とくに、Shannon エントロピーが増加することを「測定」、減少することを「情報消去」と見なせるのではないだろうか。

Jarzynski 等式から導かれる情報熱力学第二法則は誤差なし極限で沙川と上田によって導かれた第二法則となる。量子系でも古典的な系と同様に Jarzynski 等式が存在するを示しているという点で重要である。

量子 Jarzynski 等式を導くにあたって、系全体の初期状態がそれぞれの系の状態の直積で書けることを仮定している。これは初期状態において系同士に相関がなく、量子力学の特徴であるエンタングルメントがないことを意味する。一方、古典的な系では初期に系同士に相関がある場合の非平衡等式が導かれている。そのため、対応する量子系の非平衡関係式やエンタングルメント量を含むような等式があると予想できる。実際に、情報熱力学をエンタングルメントを用いて理解しようとする研究 [28, 29] が行われている。そこで導かれている第二法則は QC-

相互情報量に代わり、エンタングルメント測度が重要な量として現れている。

謝辞

本研究ではご指導ご鞭撻を頂きました羽田野直道准教授に心から感謝致します。また、本修士論文をご精読頂き有用なコメントを頂きました上田正仁教授、佐野雅己教授に深謝致します。共同研究者である、田島裕康さんからは多くの刺激と示唆を得ることができました。感謝致します。最後に、さまざまな場面で支え続けてくれた羽田野研究室の皆様に感謝いたします。ありがとうございます。

参考文献

[1] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge university press, Cambridge, 2000).

[2] J. C. Maxwell, *Theory of heat* (Appleton, London, 1871).

[3] R. Landauer, Irreversibility and Heat Generation in the Computing Process. *IBM J. Res. Dev.* **5**, 183 (1961).

[4] H. S. Leff and A. F. Rex, editors, *Maxwell's demon 2: Entropy, classical and quantum information, computing* (Institute of Physics, London, 2nd edition, 2003).

[5] K. Shizume, Heat generation required by information erasure. *Phys. Rev. E* **52**, 3495 (1995).

[6] S. Lloyd, Quantum-mechanical Maxwell's demon. *Phys. Rev. A* **56**, 3374 (1997).

[7] T. Kieu, The Second Law, Maxwell's Demon, and Work Derivable from Quantum Heat Engines. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 140403 (2004).

[8] T. Sagawa and M. Ueda, Second Law of Thermodynamics with Discrete Quantum Feedback Control. *Phys. Rev. Lett.* **100**, 080403 (2008).

[9] T. Sagawa and M. Ueda, Minimal Energy Cost for Thermodynamic Information Processing: Measurement and Information Erasure. *Phys. Rev. Lett.* **102**, 250602 (2009).

[10] O. Maroney, Generalizing Landauer's principle. *Phys. Rev. E* **79**, 031105 (2009).

[11] K. Maruyama, F. Nori, and V. Vedral, Colloquium: The physics of Maxwell's demon and information. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1 (2009).

[12] T. Sagawa and M. Ueda, Generalized Jarzynski Equality under Nonequilibrium Feedback Control. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 090602 (2010).

[13] M. Ponmurugan, Generalized detailed fluctuation theorem under nonequilibrium feedback control. *Phys. Rev. E* **82**, 031129 (2010).

[14] J. M. Horowitz and S. Vaikuntanathan, Nonequilibrium detailed fluctuation theorem for repeated discrete feedback. *Phys. Rev. E* **82**, 061120 (2010).

[15] S. Toyabe, T. Sagawa, M. Ueda, E. Muneyuki, and M. Sano, Experimental demonstration of information-to-energy conversion and validation of the generalized Jarzynski equality.

Nature Phys. **6**, 988 (2010).

[16] Y. Morikuni and H. Tasaki, Quantum Jarzynski-Sagawa-Ueda relations. *J. Stat. Phys.*, **143**, 1 (2011).

[17] S. W. Kim, T. Sagawa, S De Liberato, and M. Ueda, Quantum Szilard Engine. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 070401 (2011).

[18] J. M. Horowitz and J. M. R. Parrondo, Thermodynamic reversibility in feedback processes. *Europhys. Lett.* **95**, 10005 (2011).

[19] S. Ito and M. Sano, Effects of error on fluctuations under feedback control. *Phys. Rev. E* **84**, 021123 (2011).

[20] T. Sagawa and M. Ueda, Fluctuation Theorem with Information Exchange: Role of Correlations in Stochastic Thermodynamics. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 180602 (2012).

[21] T. Sagawa and M. Ueda, Nonequilibrium thermodynamics of feedback control. *Phys. Rev. E* **85**, 021104 (2012).

[22] S. Rana, S. Lahiri, and A. M. Jayannavar, Quantum Jarzynski equality with multiple measurement and feedback for isolated system. *Pramana* **79**, 233 (2012).

[23] D. Abreu and U. Seifert, Thermodynamics of Genuine Nonequilibrium States under Feedback Control. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 030601 (2012).

[24] D. Mandal, H. T. Quan, and C. Jarzynski, Maxwell's Refrigerator: An Exactly Solvable Model. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 030602 (2013).

[25] S. Ito and T. Sagawa, Information Thermodynamics on Causal Networks. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 180603 (2013).

[26] K. Funo, Y. Watanabe and M. Ueda, Integral quantum fluctuation theorems under measurement and feedback control. *Phys. Rev. E* **88**, 052121 (2013).

[27] H. Tasaki, Unified Jarzynski and Sagawa-Ueda relations for Maxwell's demon. arXiv:1308.3776 (2013).

[28] H. Tajima, Second law of information thermodynamics with entanglement transfer. *Phys. Rev. E* **88**, 042143 (2013).

[29] H. Tajima, Minimal energy cost of thermodynamic information processes only with entanglement transfer. arXiv:1311.1285 (2013).

[30] Y. Morikuni and H. Tajima, Quantum Jarzynski equalities for the energy costs of the information processes. arXiv:1312.6022 (2013).

[31] H. J. Groenewold, A Problem of Information Gain by Quantal Measurements. *Int. J. Theor. Phys.* **4**, 327 (1971).

[32] M. Ozawa, On information gain by quantum measurements of continuous observables. *J. Math. Phys.* **27**, 759 (1986).