非エルミート量子力学と局在現象

羽田野　直道

青山学院大学　物理学科

共同研究者

D.R. Nelson (Harvard)

A. Zee (UC Santa Barbara)

参考文献

N.H. and D.R. Nelson:

PRL 77, 570 (1996)

PRB 56, 8651 (1997)

PRB 58, 8384 (1998)

N.H.:

Physica A 254, 317 (1998)

学会誌1998年11月号

固体物理1999年３月号

なぜ非エルミート？

1）概念を拡張して、新たな
視点から物理を眺める

2）有効的に物理を表現する

(1) アンダーソン局在

局在長や移動端を求める

(2) 高温超伝導体中の
磁束線ピン止め

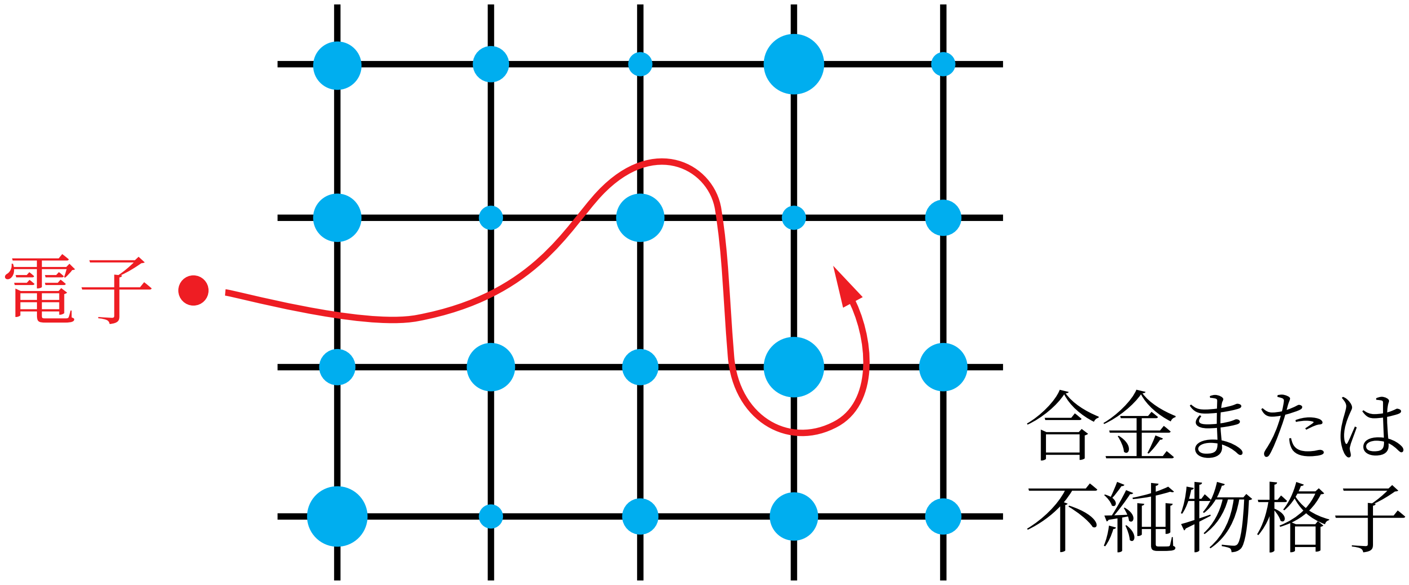
ピン止め破壊点を求める

(3) 共鳴状態

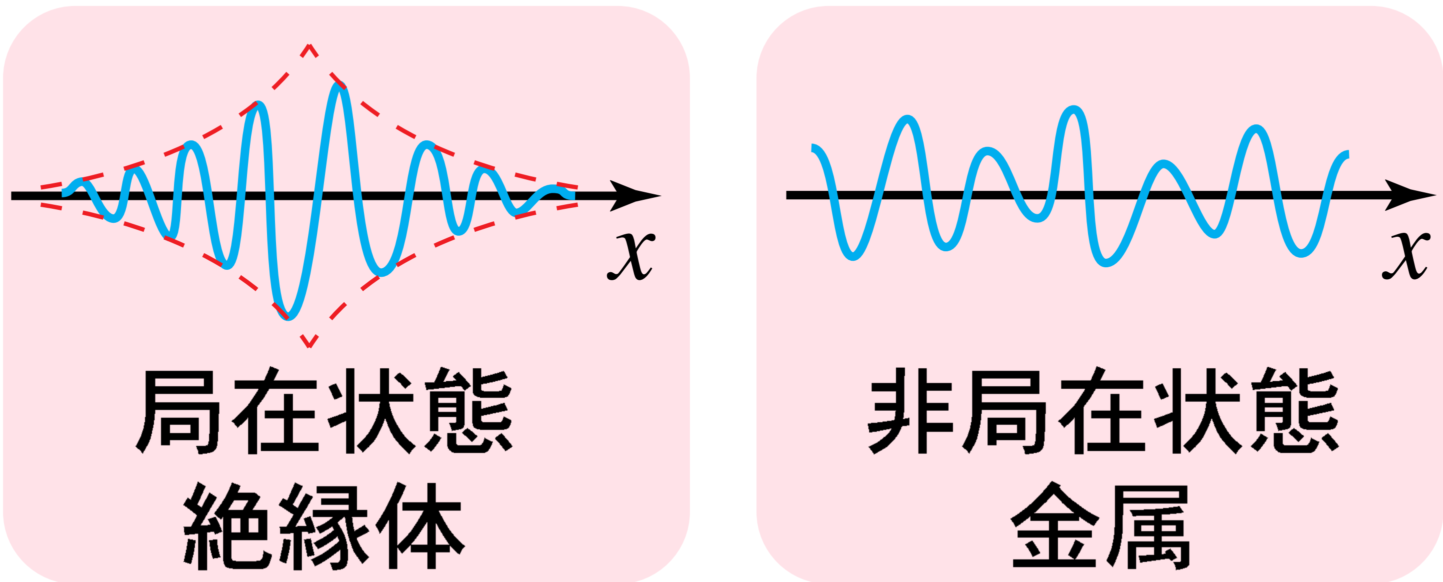
散乱問題における共鳴状
態の寿命を求める

目次

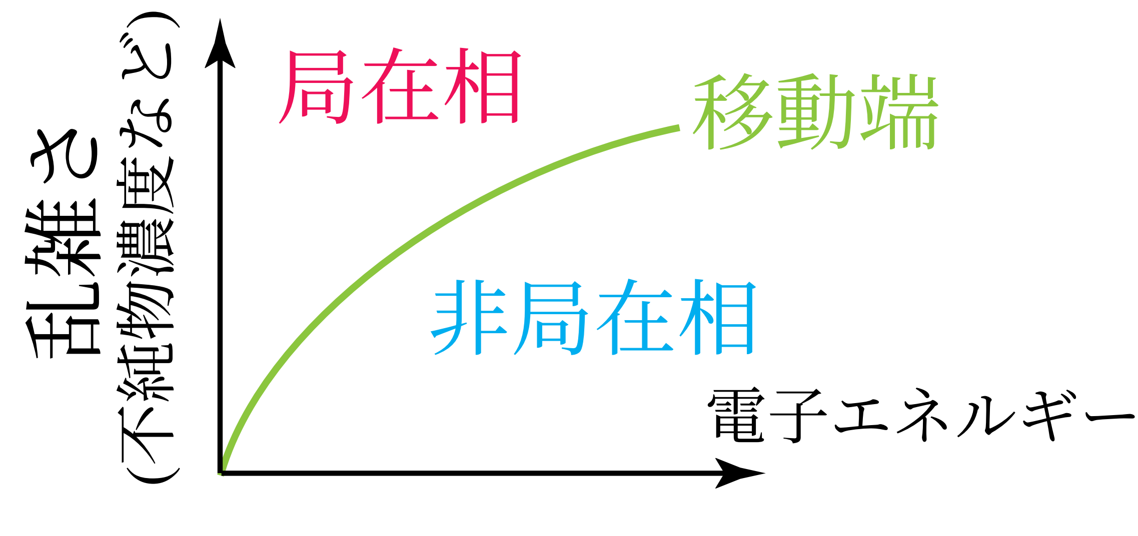
局在とは何か？



電子
合金または
不純物格子



x
局在状態
絶縁体
x
非局在状態
金属



乱雑さ
（不純物濃度など）
局在相
移動端
非局在相
電子エネルギー

非エルミート
アンダーソン模型

連続空間模型

$$H = \frac{(p+ig)^2}{2m} + V(x)$$

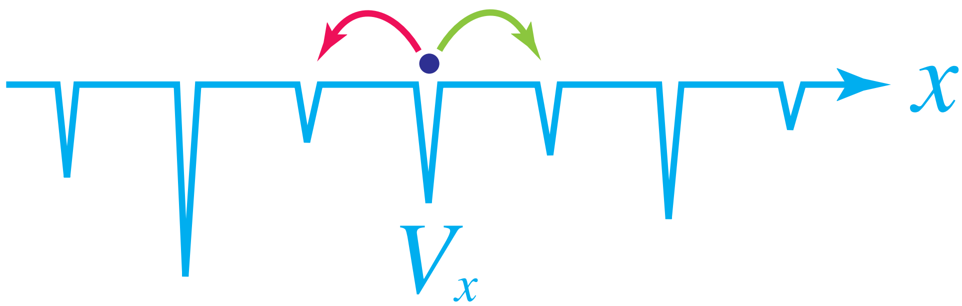
g: "虚数ベクトルポテンシャル" (定数ベクトル)

$V(x)$: (スカラー)ランダムポテンシャル

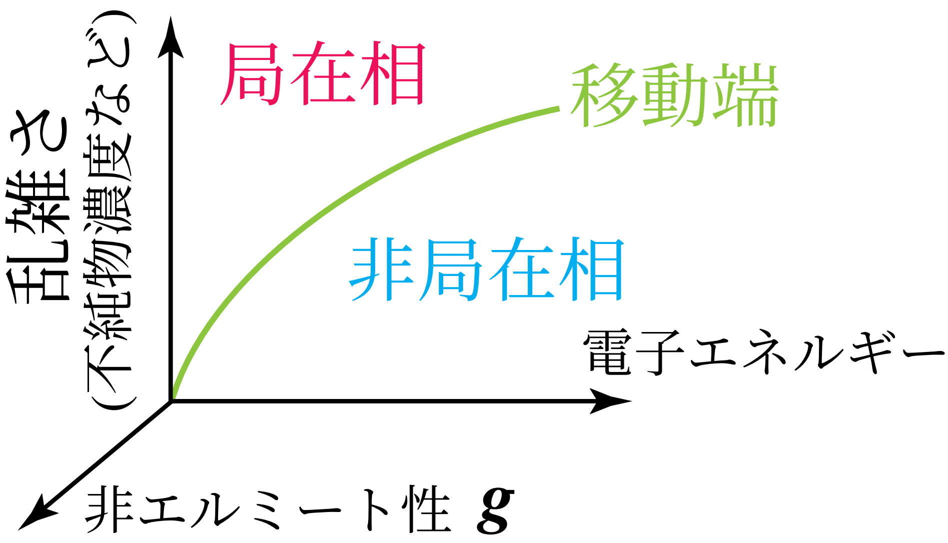
$g=0$: (通常のエルミートな)一電子アンダーソン模型

格子模型

$$H = -\frac{t}{2}\sum_{\boldsymbol{x}}\sum_{\nu=1}^{d}\left(e^{\bar{\boldsymbol{g}}\cdot\boldsymbol{e}_\nu}\left|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_\nu\right\rangle\left\langle\boldsymbol{x}\right| + e^{-\bar{\boldsymbol{g}}\cdot\boldsymbol{e}_\nu}\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_\nu\right\rangle\left\langle\boldsymbol{x}\right|\right) + \sum_{\boldsymbol{x}} V_{\boldsymbol{x}}\left|\boldsymbol{x}\right\rangle\left\langle\boldsymbol{x}\right|$$



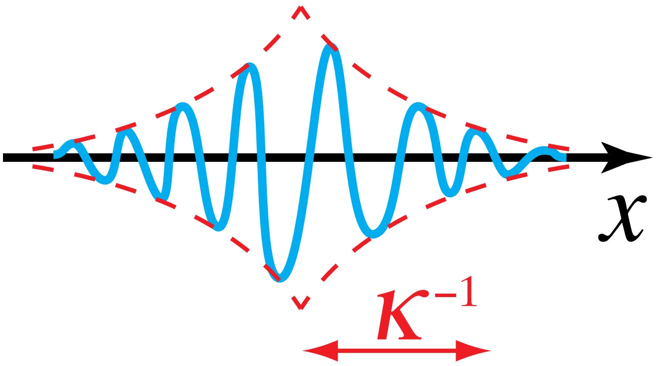
非対称ホッピングとランダムネスの競合



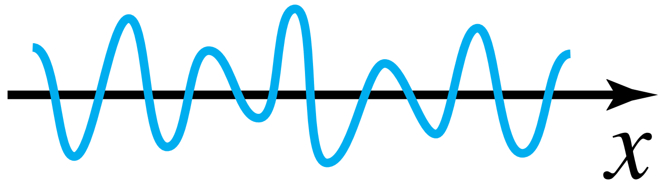
非エルミート非局在転移

g=0: 局在状態が存在

$\psi \sim e^{-\kappa|x|}$



$\kappa = 0$



(i) $\boldsymbol{g}\uparrow$: $g = g_{\mathrm{c}}$ で
非局在転移する

(ii) 非局在転移と
複素固有値

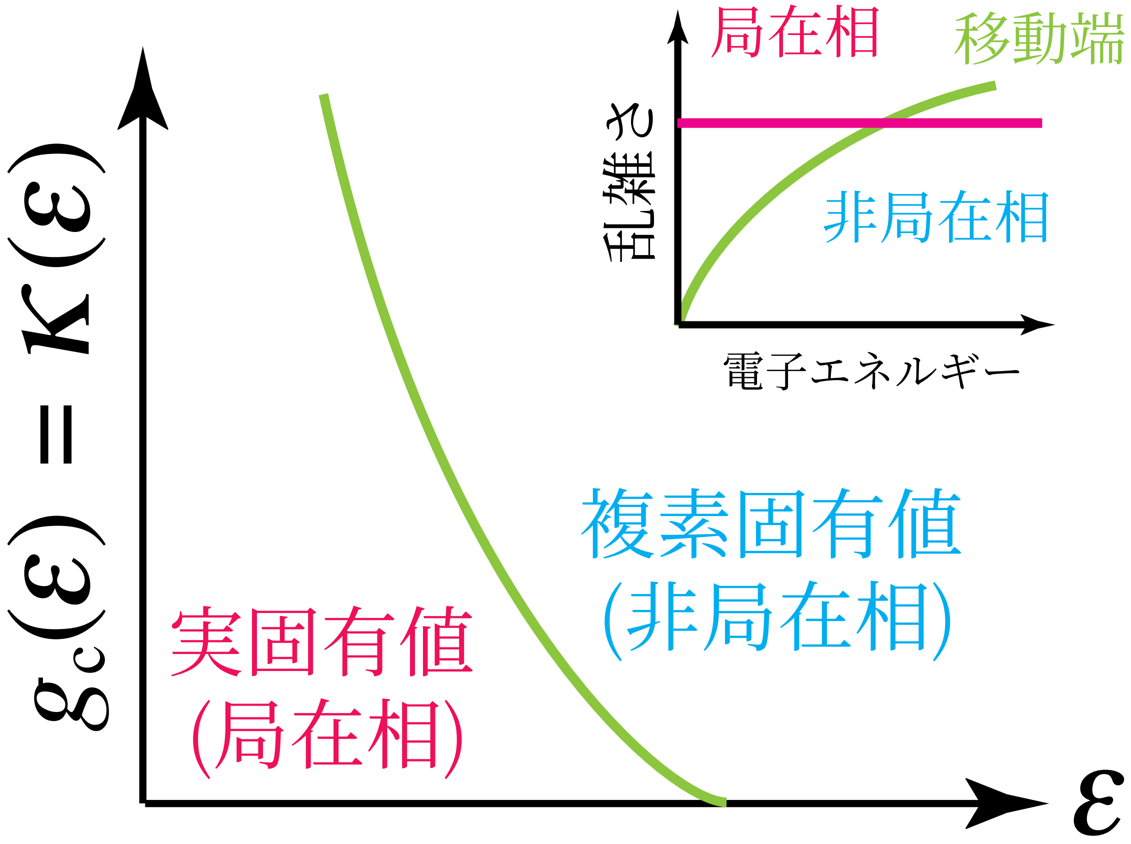
(iii) 局在長逆数: $\kappa = g_{\mathrm{c}}$

研究目的

(1) エルミート・アンダーソン模型の局在長の計算

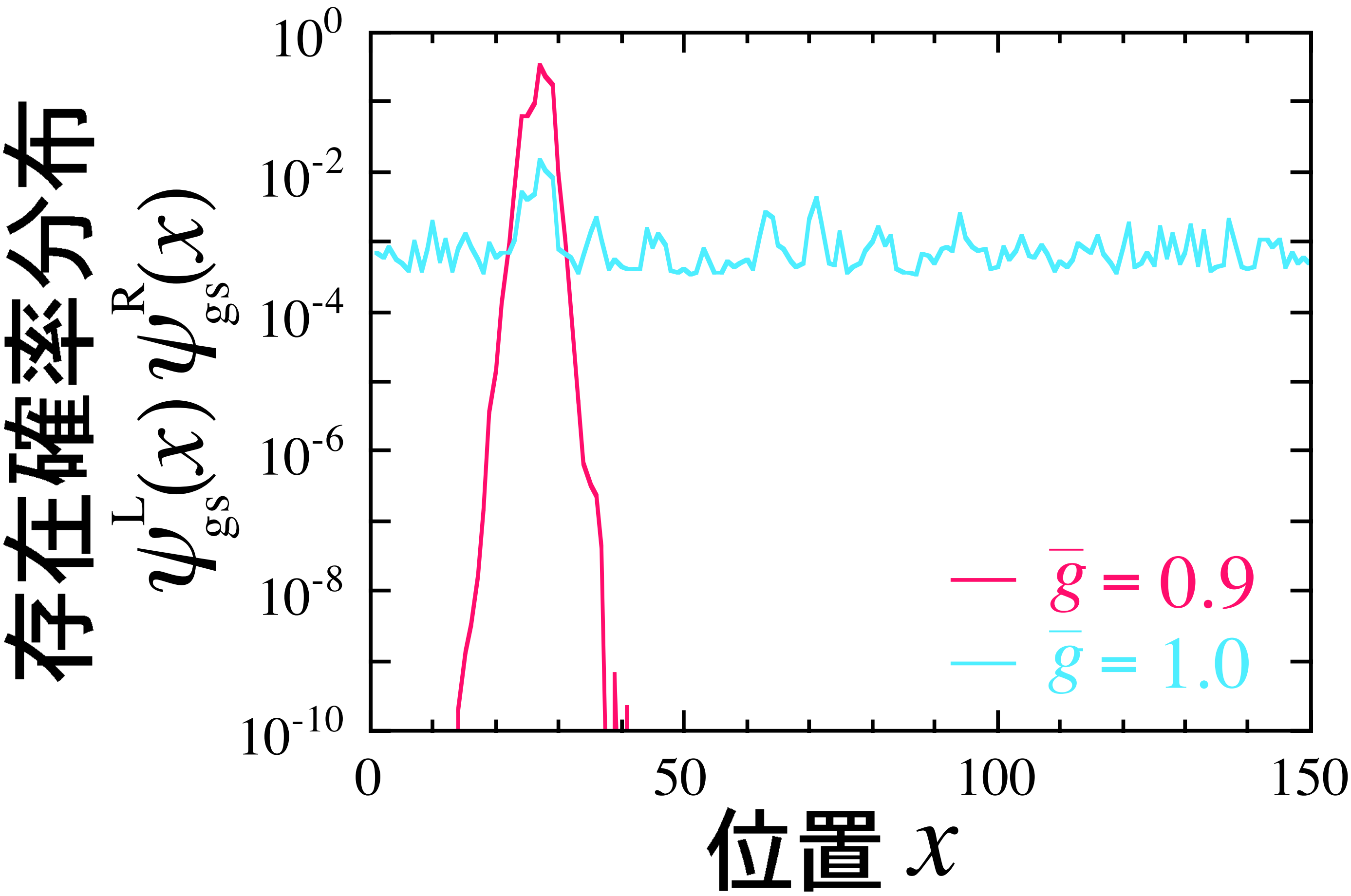
エルミートの場合 ($g = 0$): $\psi_0 \sim e^{-\kappa|x|}$

$g = g_c$ で複素固有値が出現 ⟶ $\kappa = g_c$



非エルミート非局在転移
数値計算例

一次元・1000 サイト・1000×1000 行列を対角化

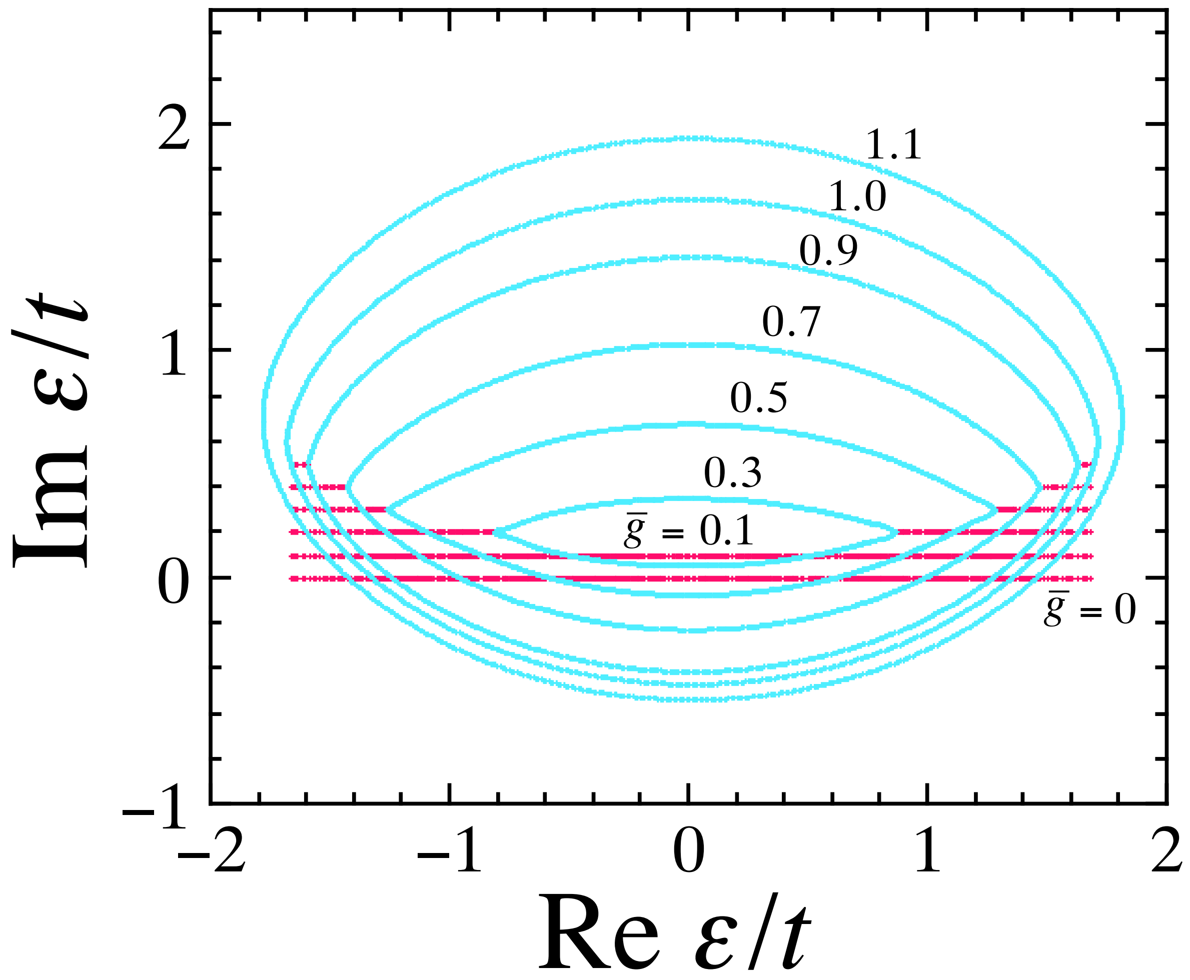


注：粒子の存在確率 $\neq \left|\psi(x)\right|^2$

$$\left.\begin{aligned} H\left|\psi^{\mathrm{R}}\right\rangle &= \varepsilon\left|\psi^{\mathrm{R}}\right\rangle \\ \left\langle\psi^{\mathrm{L}}\right|H &= \varepsilon\left\langle\psi^{\mathrm{L}}\right| \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\langle\psi^{\mathrm{L}}\right| \neq \left|\psi^{\mathrm{R}}\right\rangle^{\dagger}$$

複素固有値と非局在転移
数値計算例

一次元・1000 サイト・1000×1000 行列を対角化



実数固有値
局在状態

$\kappa > g$

複素固有値
非局在状態

$\kappa < g$

非局在転移のしくみ
複素ゲージ変換

$$H_g = \frac{(\boldsymbol{p} + i\boldsymbol{g})^2}{2m} + V(\boldsymbol{x})$$

$$e\boldsymbol{A} \leftrightarrow i\boldsymbol{g}$$

$\boldsymbol{g} \neq \boldsymbol{0}$: $H_g \psi_g = \varepsilon \psi_g$

ゲージ変換: $\psi_g = \psi_0 e^{\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x}}$

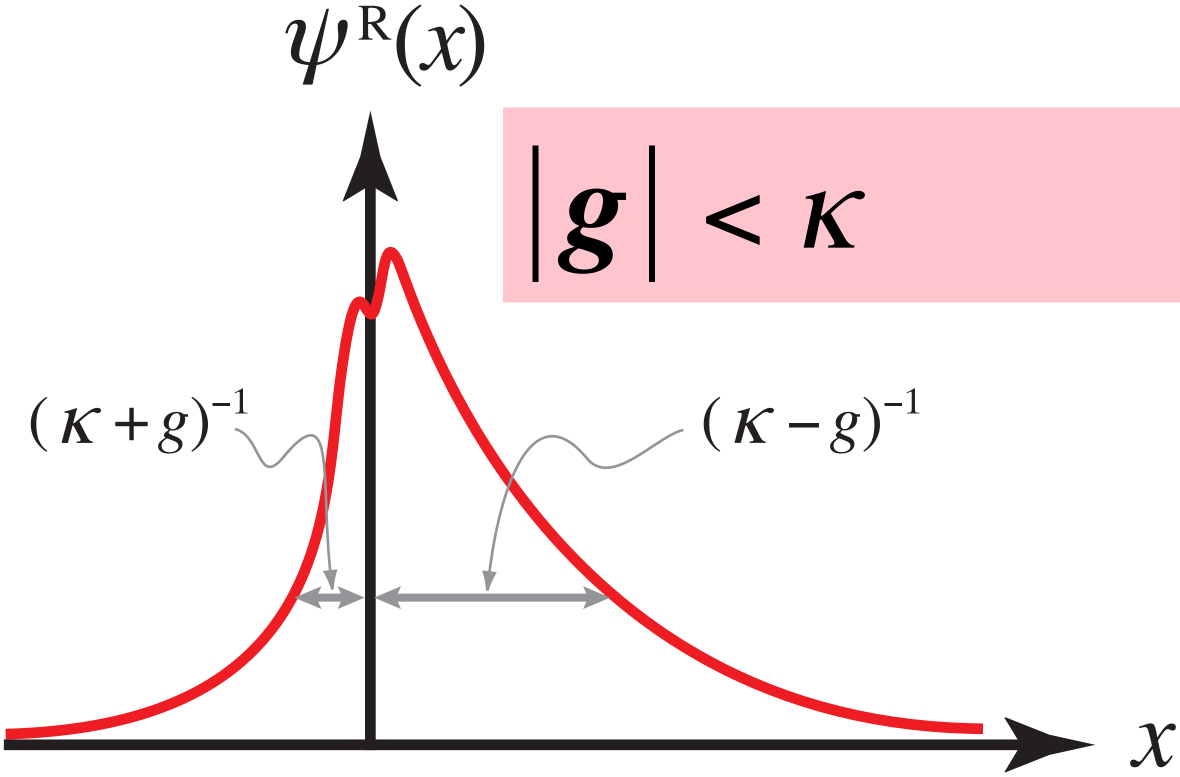
$\Downarrow$

$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$: $H_0 \psi_0 = \varepsilon_0 \psi_0$

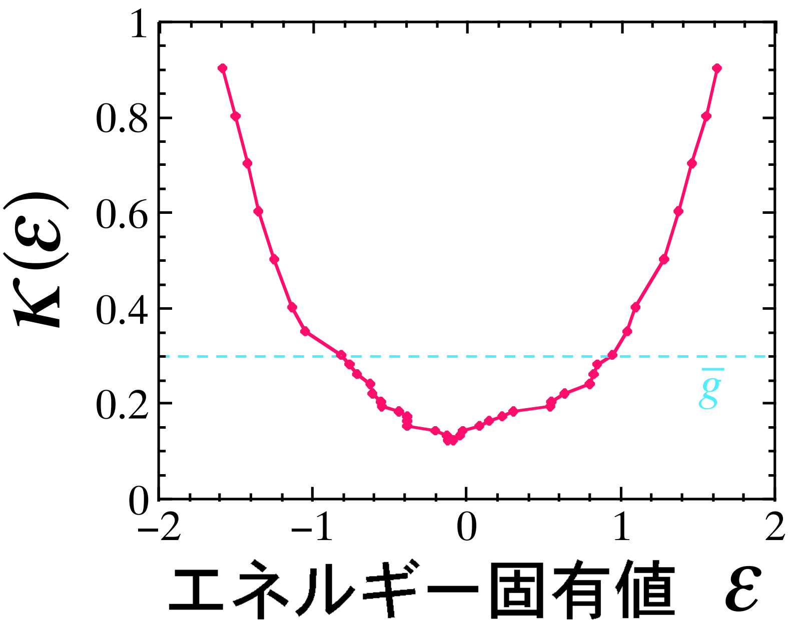
$\varepsilon = \varepsilon_0$: 実数値に固定

$$\psi_0 \sim e^{-\kappa|\boldsymbol{x}|} \Rightarrow \psi_{\boldsymbol{g}}^{\mathrm{R}} \sim e^{-\kappa|\boldsymbol{x}|+\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x}}$$

$$|\boldsymbol{g}| < \kappa$$

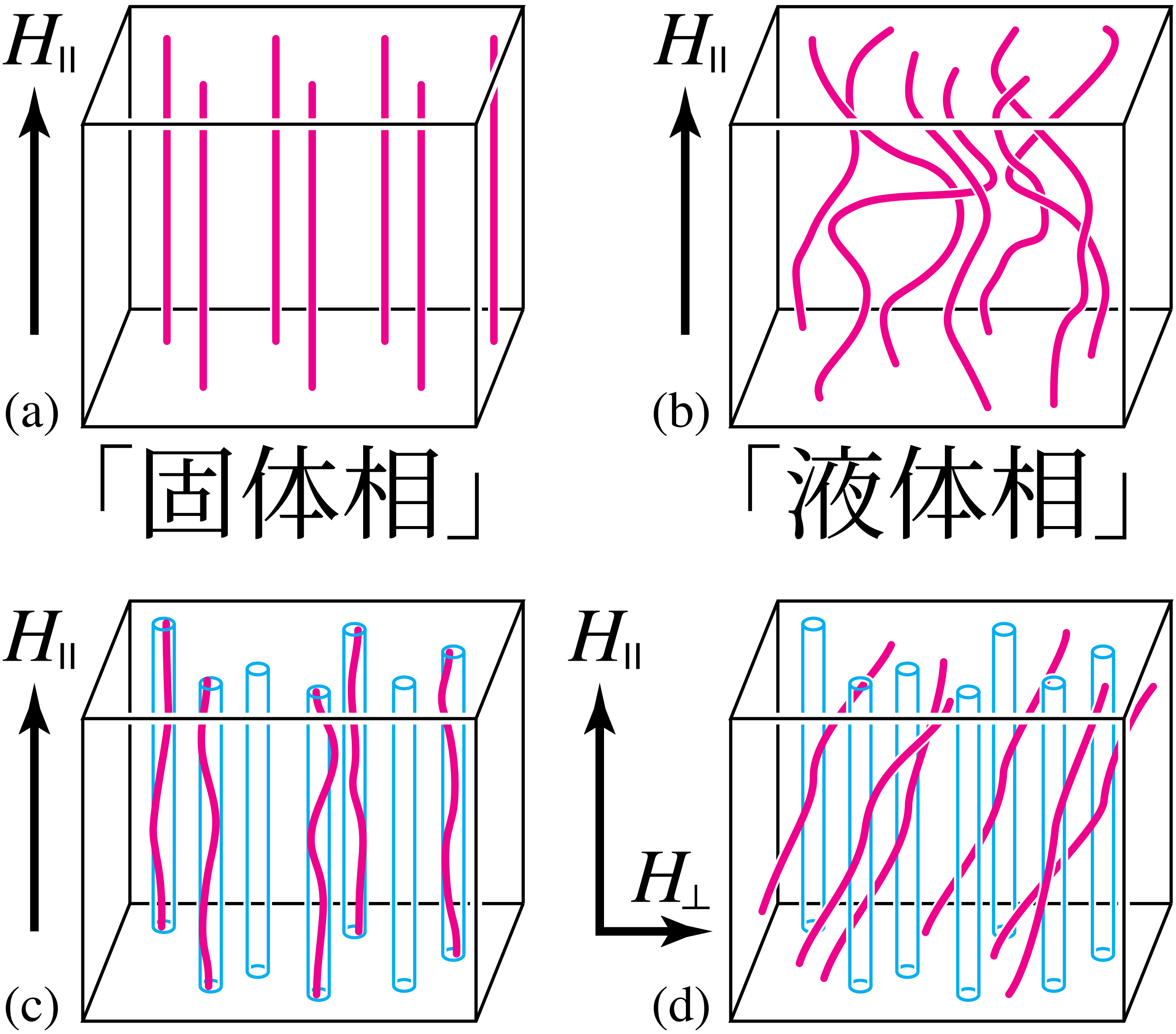


$$|\boldsymbol{g}| > \kappa: \ \psi^{\mathrm{R}} \sim \boldsymbol{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \ \varepsilon \sim \frac{(\boldsymbol{k}+i\boldsymbol{g})^2}{2m}$$



研究目的

(2) 高温超伝導体中の磁束線ピン止め



(a)「固体相」　(b)「液体相」

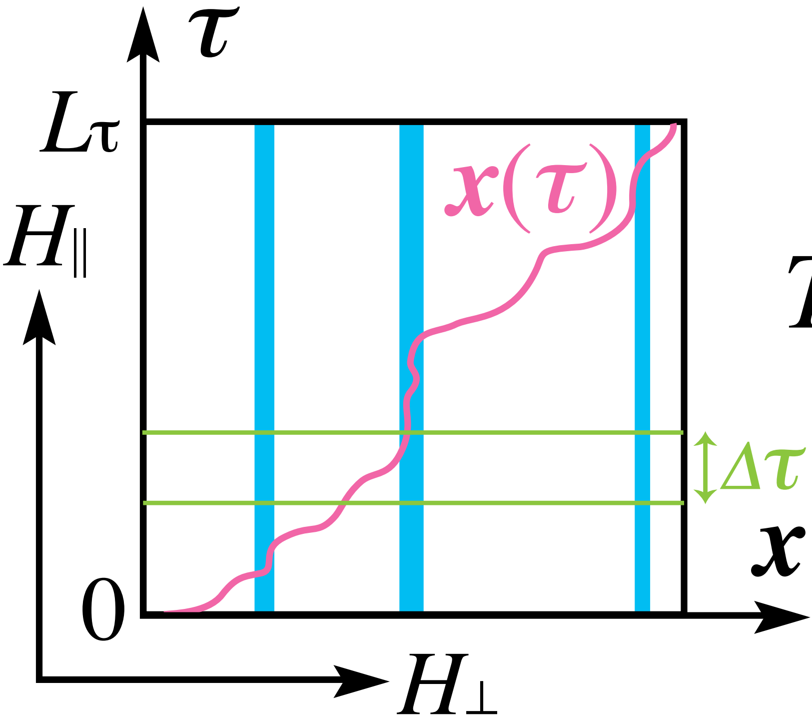
(c)「ガラス相」　(d)「液体相」

経路積分で量子系へ

$$E_{cl}[\boldsymbol{x}(\tau)] = \int_0^{L_\tau} d\tau \left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}\right)^2 - \boldsymbol{g}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} + V(\boldsymbol{x}) \right]$$

$$\boldsymbol{g} \equiv \Phi_0 \boldsymbol{H}_\perp / (4\pi)$$

Nelson and Vinokur, PRB **48**, 13060 (1993)



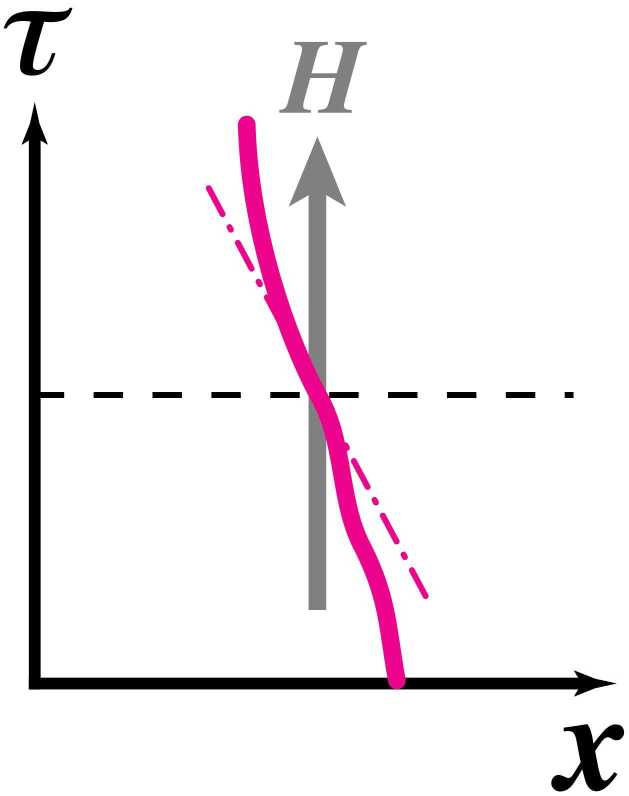
転送行列

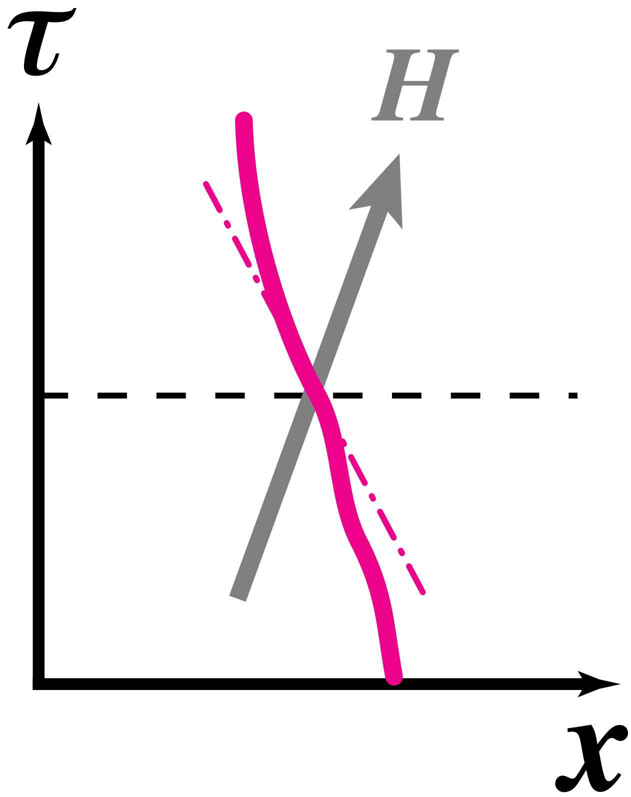
$$T(\Delta\tau) \approx \exp(-\Delta\tau\, H\,)$$

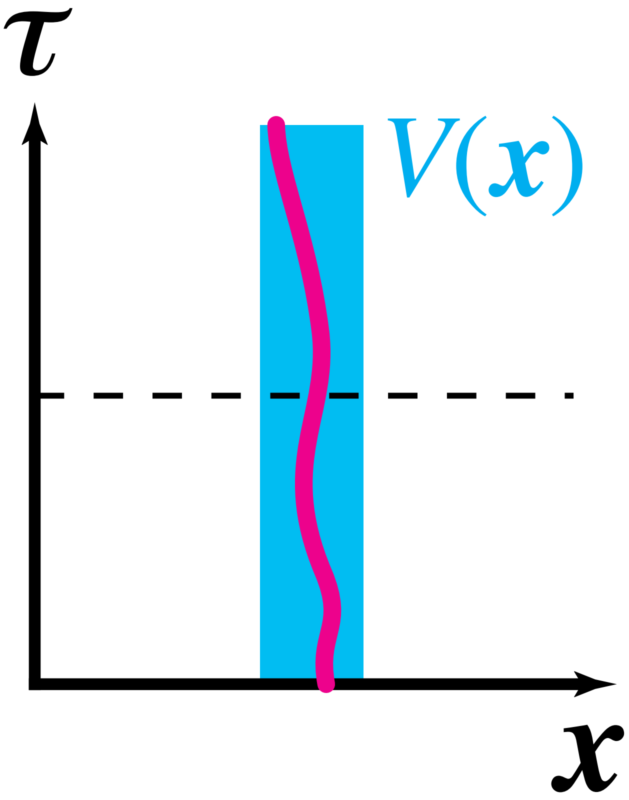
$$Z = \int D\boldsymbol{x}\; e^{-E_{cl}[\boldsymbol{x}(\tau)]} = \langle \psi^f | e^{-L_\tau H} | \psi^i \rangle$$

$$H = \frac{(\boldsymbol{p}+i\boldsymbol{g})^2}{2m} + V(r)$$

磁束線の統計力学模型

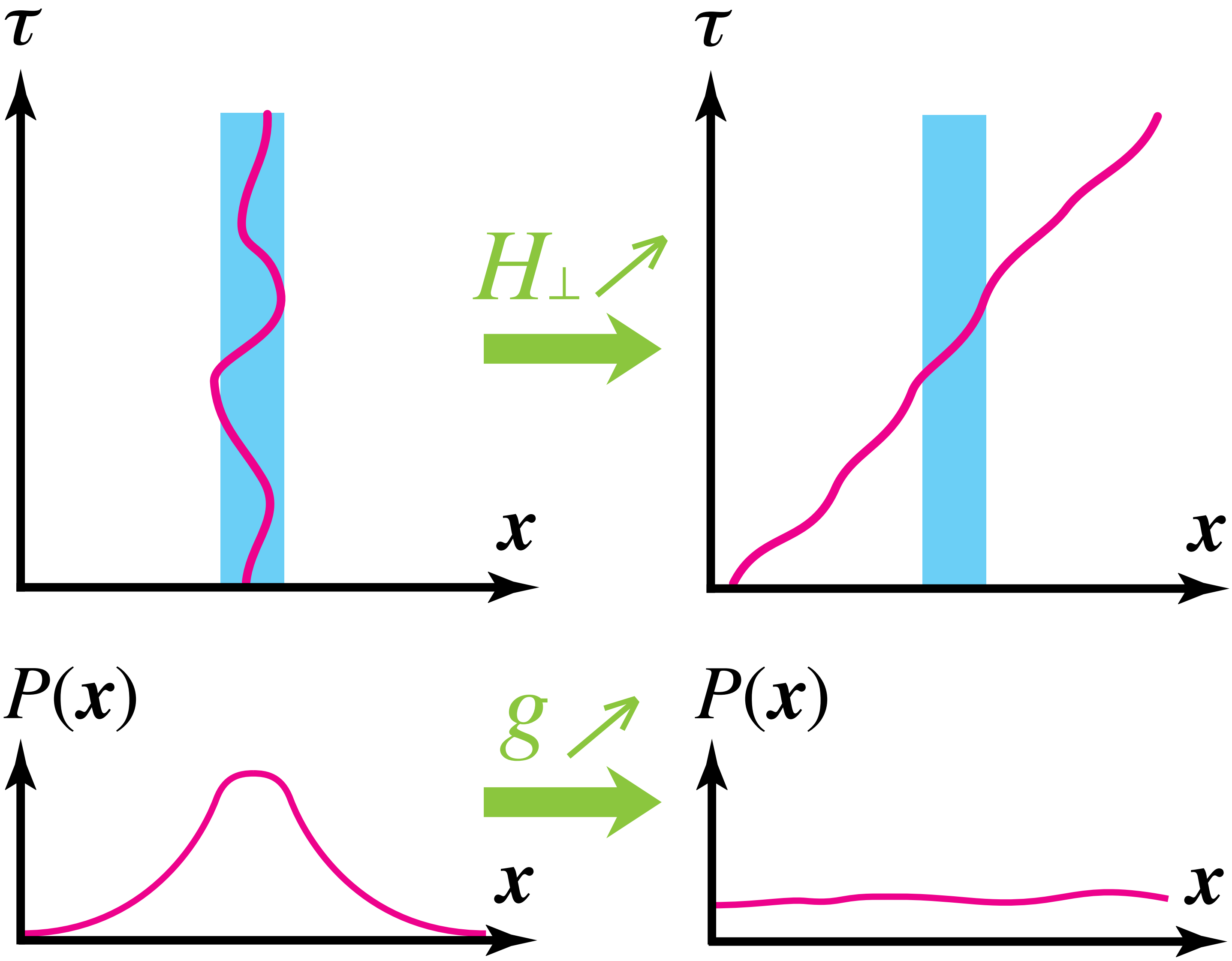






$$\frac{m}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}\right)^2 - \boldsymbol{g}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} + V(\boldsymbol{x})$$

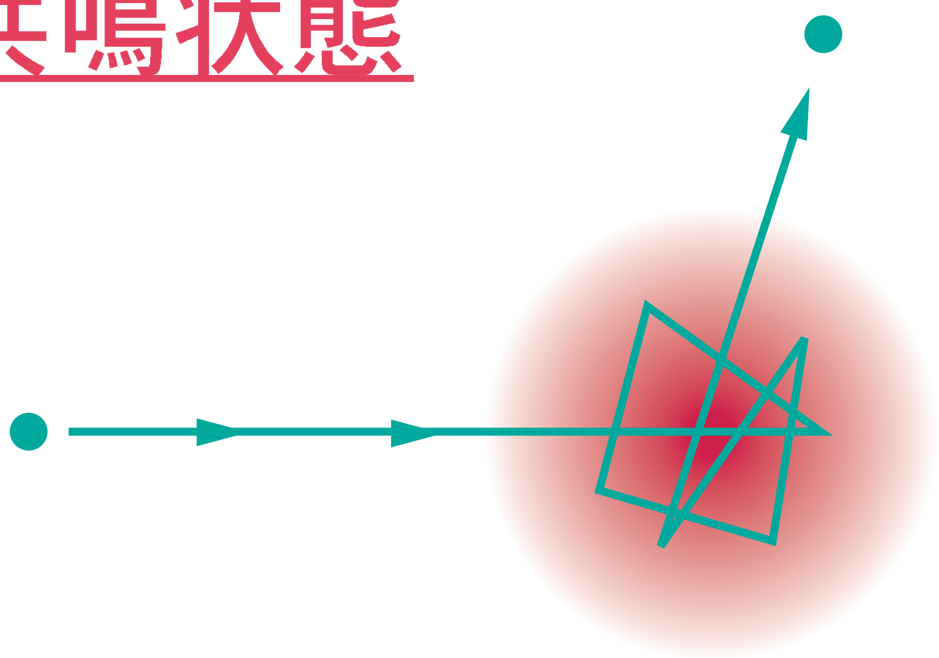
ピン止めと局在



ピン止め	ピン止め破壊
↓	↓
局在分布関数	非局在分布関数

研究目的

(3) 共鳴状態



$$E_{\rm res} = E_{\rm r} - i\Gamma/2 \approx \frac{(k - i\gamma)^2}{2m}$$

Γ^{-1}: 共鳴状態の寿命

$$\psi_{\rm res}(r) \sim e^{i(k-i\gamma)r} \quad \text{as} \quad r \rightarrow \infty$$

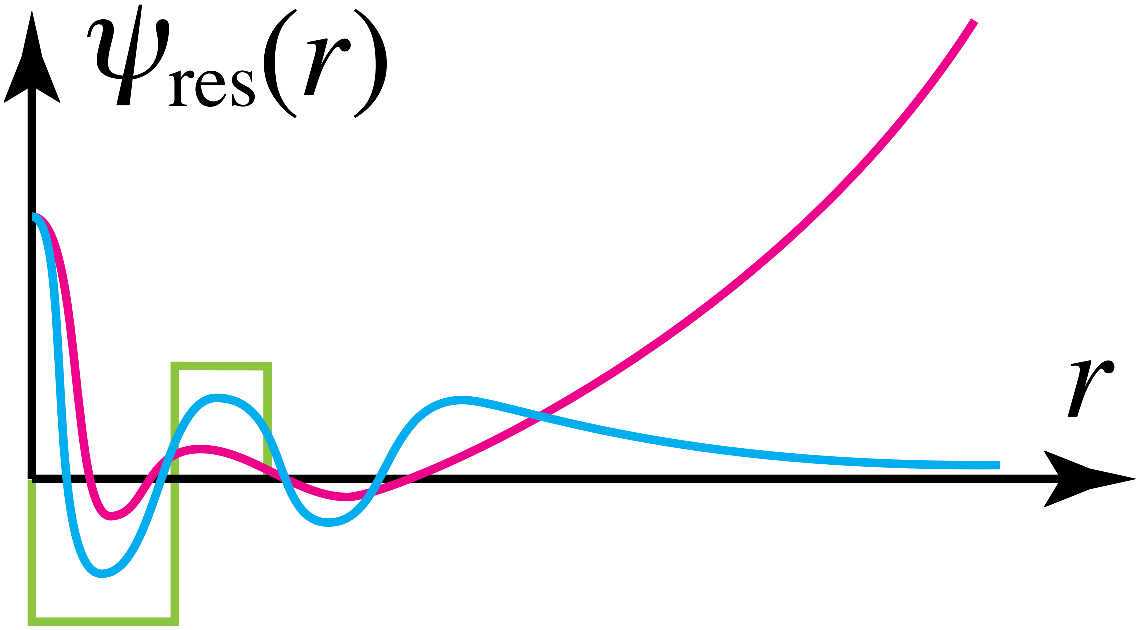
境界条件を満たさない

$$H = \frac{(\boldsymbol{p}+i\boldsymbol{g})^2}{2m} + V(r); \quad \boldsymbol{g} \equiv -g_0 \frac{\boldsymbol{x}}{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\psi_{\mathrm{res}}(r;g) = \psi_{\mathrm{res}}(r;0)\, e^{-g_0 r}$$

$$\sim e^{ikr-(g_0-\gamma)r}$$



Aguilar *et al*, Comm. Math. Phys. **22** (1971)
加藤　他、学会誌1998年2月号

複素スケーリング $\begin{cases} r \to re^{i\theta} \\ p \to pe^{-i\theta} \end{cases}$

その他の応用・展望

- 電荷密度波のピン止め破壊

  Chen *et al.*, PRB **54**, 12798 (1996)

- フォッカー・プランク方程式

  Nelson and Shnerb, PRE **58**, 1383 (1998)

- ランダム・ゲージ場中の
  ディラック・フェルミオン

  Mudry *et al.* PRL **80**, 4257 (1998)

- PT 対称性と実数固有値

  Bender and Boettcher, PRL **80**, 5243 (1998)

  複素エネルギー固有値 $\leftrightarrow$ PT 対称性の破れ

- 相互作用と多体問題

  Lehrer and Nelson, cond-mat/9806016

  周期ポテンシャル中のモット相と非局在転移

- 非エルミート・ランダム行列