非エルミート 量子力学と局在現象

羽田野　直道
青山学院大学　物理学科

共同研究者
D.R. Nelson (Harvard)
A. Zee (UC Santa Barbara)

参考文献
N.H. and D.R. Nelson:
PRL 77, 570 (1996)
PRB 56, 8651 (1997)
PRB 58, 8384 (1998)
N.H.:
Physica A 254, 317 (1998)
学会誌1998年11月号
固体物理1999年３月号

なぜ非エルミート？

1) 概念を拡張して、新たな視点から物理を眺める
2) 有効的に物理を表現する

(1) **アンダーソン局在**
局在長や移動端を求める

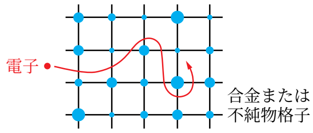
(2) **高温超伝導体中の磁束線ピン止め**
ピン止め破壊点を求める

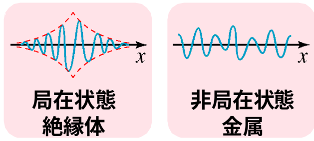
(3) **共鳴状態**:
散乱問題における共鳴状態の寿命を求める

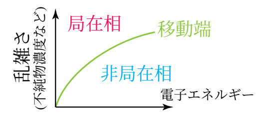
目次

1. 局在とは何か？
2. 非エルミート・アンダーソン模型と非局在転移
3. 研究目的 I ——
   局在長の計算
4. 複素スペクトルと非局在転移
5. なぜ非局在化するのか？
6. 研究目的 II ——
   磁束線ピン止め
   共鳴寿命の計算

局在とは何か？







非エルミート アンダーソン模型

連続空間模型

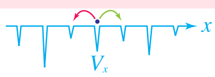
$$H=\frac{(p+ig)^2}{2m}+V(x)$$

g: “虚数ベクトルポテンシャル” (定数ベクトル)
$V(x)$: (スカラー)ランダムポテンシャル

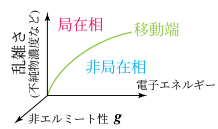
g=0: (通常のエルミートな)
一電子アンダーソン模型

格子模型

$$H=-\frac{t}{2}\sum_{x}\sum_{\nu=1}^{d}\left(e^{g\cdot e_\nu}|x+e_\nu\rangle\langle x|+e^{-g\cdot e_\nu}|x-e_\nu\rangle\langle x|\right)+\sum_{x}V_x|x\rangle\langle x|$$

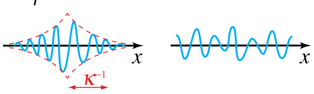


非対称ホッピングと**ランダムネス**の競合



非エルミート非局在転移

g=0: 局在状態が存在



(i) $g\uparrow$: $g = g_c$ で非局在転移する

(ii) 非局在転移と複素固有値が対応

(iii) 局在長逆数: $\kappa = g_c$

非局在転移のしくみ
複素ゲージ変換

$$H_g = \frac{(\boldsymbol{p} + i\boldsymbol{g})^2}{2m} + V(\boldsymbol{x})$$

$$eA \leftrightarrow ig$$

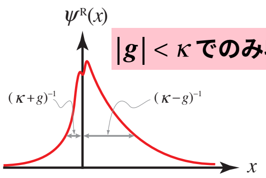
$g = 0$: $H_0\psi_0 = \varepsilon_0\psi_0$

$g \neq 0$: $H_g\psi_g = \varepsilon\psi_g$

ゲージ変換: $\psi_g = \psi_0 e^{g\cdot x}$

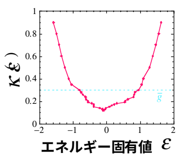
$\varepsilon = \varepsilon_0$: 実数値に固定

$\psi_0 \sim e^{-\kappa|x|} \Rightarrow \psi_g^{\mathrm{R}} \sim e^{-\kappa|x| + g\cdot x}$



$|g| < \kappa$ でのみ収束

$|g| > \kappa$: $\psi^{\mathrm{R}} \sim e^{ik\cdot x}$, $\varepsilon \sim \frac{(k+ig)^2}{2m}$

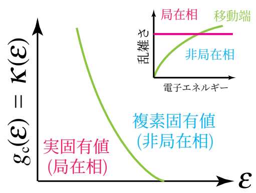


研究目的

(1) エルミート・アンダーソン模型の局在長の計算

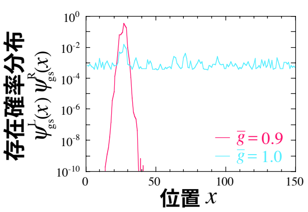
エルミートの場合 ($g = 0$): $\psi_0 \sim e^{-\kappa|x|}$

$g = g_c$ で複素固有値が出現 $\longrightarrow$ $\kappa = g_c$



非エルミート非局在転移
数値計算例

一次元・1000 サイト・1000×1000 行列を対角化



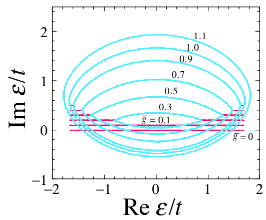
注：粒子の存在確率 $\neq |\psi(x)|^2$

$H|\psi^{\mathrm{R}}\rangle = \varepsilon|\psi^{\mathrm{R}}\rangle$

$\langle\psi^{\mathrm{L}}|H = \varepsilon\langle\psi^{\mathrm{L}}|$ $\rightarrow \langle\psi^{\mathrm{L}}| \neq |\psi^{\mathrm{R}}\rangle^\dagger$

複素固有値と非局在転移
数値計算例

一次元・1000 サイト・1000×1000 行列を対角化

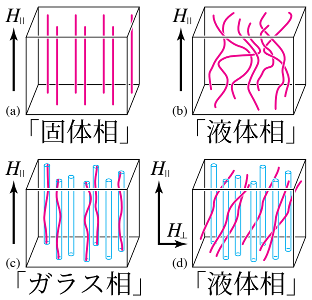


実数固有値
局在状態
$\kappa > g$

複素固有値
非局在状態
$\kappa < g$

研究目的

(2) <u>高温超伝導体中の磁束線ピン止め</u>

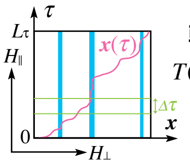


経路積分で量子系へ

$$E_{cl}[\boldsymbol{x}(\tau)] = \int_0^{L_\tau} d\tau \left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \boldsymbol{g}\cdot\frac{dx}{d\tau} + V(\boldsymbol{x})\right]$$

$$\boldsymbol{g} \equiv \Phi_0 \boldsymbol{H}_\perp / (4\pi)$$

Nelson and Vinokur, PRB **48**, 13060 (1993)



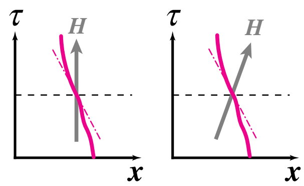
転送行列

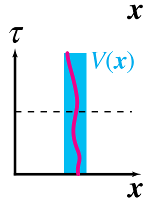
$T(\Delta\tau) \approx \exp(-\Delta\tau H)$

$$Z = \int Dx\ e^{-E_{cl}[x(\tau)]} = \langle \psi^f | e^{-L_\tau H} | \psi^i \rangle$$

$$H = \frac{(p+ig)^2}{2m} + V(r)$$

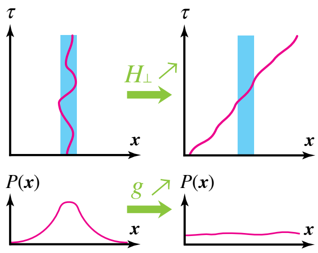
磁束線の統計力学模型





$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - g\cdot\frac{dx}{d\tau} + V(x)$$

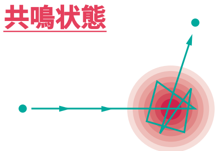
ピン止めと局在



ピン止め	ピン止め破壊
⬇	⬇
局在分布関数	非局在分布関数

研究目的

(3) <u>共鳴状態</u>



$$E_{\mathrm{res}} = E_r - i\Gamma/2 \approx \frac{(k-i\gamma)^2}{2m}$$

Γ^{-1}: 共鳴状態の寿命

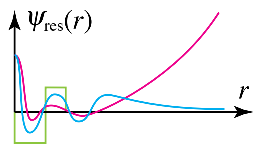
$\psi_{\mathrm{res}}(r) \sim e^{i(k-i\gamma)r}$ as $r \to \infty$

境界条件を満たさない

$$H = \frac{(p+ig)^2}{2m} + V(r)\ ;\ \boldsymbol{g} = -g_0 \frac{\boldsymbol{x}}{r}$$

⬇

$$\psi_{\mathrm{res}}(r;g) = \psi_{\mathrm{res}}(r;0)\ e^{-g_0 r} \sim e^{ikr-(g_0-\gamma)r}$$



Aguilar *et al*, Comm. Math. Phys. **22** (1971)
加藤　他、学会誌1998年2月号

複素スケーリング $\begin{cases} r \to re^{i\theta} \\ p \to pe^{-i\theta} \end{cases}$

その他の応用・展望

- **電荷密度波のピン止め破壊**
  Chen *et al*., PRB **54**, 12798 (1996)
- **フォッカー・プランク方程式**
  Nelson and Shnerb, PRE **58**, 1383 (1998)
- **ランダム・ゲージ場中の ディラック・フェルミオン**
  Mudry *et al*. PRL **80**, 4257 (1998)
- **PT 対称性と実数固有値**
  Bender and Boettcher, PRL **80**, 5243 (1998)
  複素エネルギー固有値 $\leftrightarrow$ PT 対称性の破れ
- **相互作用と多体問題**
  Lehrer and Nelson, cond-mat/9806016
  周期ポテンシャル中のモット相と非局在転移
- **非エルミート・ランダム行列**