振動波動論（月曜１限）：2014 **年** 1 **月** 20 **日・**27 **日分のまとめ**　　2014 年 1 月 27 日配布

担当：羽田野直道　`hatano@iis.u-tokyo.ac.jp`
`http://hatano-lab.iis.u-tokyo.ac.jp/hatano/index-j.html`

[I] 離散周期関数のフーリエ変換

バネでつながれた N 個の重りの振動を議論した際にフーリエ変換を導入しました。x 軸上で離散的な点

$$\begin{aligned} x_n &= (n-1)a \quad (\text{ただし } n = 1, 2, \ldots, N) \\ &= 0, a, 2a, \ldots, (N-1)a \end{aligned} \tag{1}$$

において定義されている関数 $f(x_n)$ を考えます。さらにこの関数は $L = Na$ の周期を持つ関数であるとします。つまり $f(x_{N+1}) = f(x_1)$ です。このとき、関数 $f(x_n)$ は $e^{ik_\mu x_n}$ という波の重ね合わせ

$$f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^{N} g(k_\mu) e^{ik_\mu x_n} \tag{2}$$

の形で書けます。これがフーリエ変換です。ただし波数は

$$\begin{aligned} k_\mu &= \frac{2\pi}{L}(\mu - 1) \quad (\text{ただし } \mu = 1, 2, \ldots, N) \\ &= 0, \frac{2\pi}{L}, \frac{4\pi}{L}, \ldots, \frac{2\pi}{L}(N-1) = \frac{2\pi}{a} - \frac{2\pi}{L} \end{aligned} \tag{3}$$

という離散的な値をとり、$g(k_\mu)$ が重ね合わせの係数です。重ね合わせの係数は

$$g(k_\mu) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) e^{-ik_\mu x_n} \tag{4}$$

によって計算できます。これが逆フーリエ変換です。

さて、以下での議論に利用するために、２つの変更を行います。まず、波数を式 (3) の N 個から

$$k_\mu = -\frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{L}, -\frac{\pi}{a} + \frac{4\pi}{L}, \ldots, -\frac{2\pi}{L}, 0, \frac{2\pi}{L}, \ldots, \frac{\pi}{a} - \frac{2\pi}{L}, \frac{\pi}{a} \tag{5}$$

の N 個に変更します（図 1）。これは、波を $x_n = (n-1)a$ という離散的な場所で見ている限りは、k_μ を

$$\frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{L} N \tag{6}$$

だけずらしても波が変わらないことを使っています。なぜなら

$$i\left(k_\mu - \frac{2\pi}{L}N\right) x_n = ik_\mu x_n - i\frac{2\pi}{a}(n-1)a = ik_\mu x_n - i2\pi(n-1) \tag{7}$$

となり、ずれた位相が 2π の整数倍だからです。

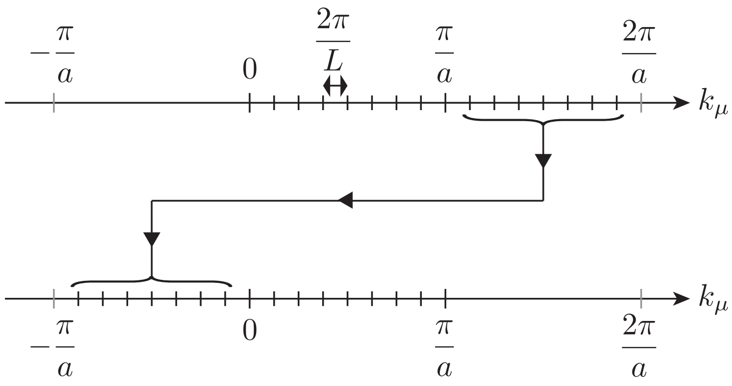


図 1: k_μ を部分的に N 個だけ左へずらす。

もう一つは式 (2) と (4) の係数の変更です。式 (2) を

$$f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{2\pi}{L} \sum_{\mu=1}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{L}{\sqrt{2\pi}} g(k_\mu) \right) e^{ik_\mu x_n} \tag{8}$$

と書き換えます。ここで最初の係数 $1/\sqrt{2\pi}$ は今後に残したい係数です。次の係数 $2\pi/L$ は、k_μ に関する和の間隔で、このようにとっておくと後で積分の極限が取りやすくなります。さて、式 (8) において

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{L}{\sqrt{2\pi}} g(k_\mu) \tag{9}$$

を新たにフーリエ変換の関数 $g(k_\mu)$ と定義することにします。これに合わせて式 (4) を

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{L}{\sqrt{2\pi}} g(k_\mu) = \frac{1}{N} \frac{L}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) e^{-ik_\mu x_n} \tag{10}$$

と書き換えると、あたらしく定義し直した $g(k_\mu)$ を使って

$$f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{2\pi}{L} \sum_{\mu=1}^{N} g(k_\mu) e^{ik_\mu x_n} \tag{11}$$

$$g(k_\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times a \sum_{n=1}^{N} f(x_n) e^{-ik_\mu x_n} \tag{12}$$

と書けることになります。式 (12) においても、係数 a は x_n に関する和の間隔になっており、後で積分の極限が取りやすくなります。

[II] 連続周期関数・離散非周期関数・連続非周期関数のフーリエ変換

次に x 軸上で連続的な関数のフーリエ変換を考えましょう。ただし周期 L は変わらないとします。このような関数のフーリエ変換は、[I] の議論において $L = Na$ を一定にしつつ $a \to 0, N \to \infty$ とすれば実現できます。

関数 $f(x)$	周期関数（周期 L）	非周期関数（$L \to \infty$）
離散関数（間隔 a）	$f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi}{L} \sum_{\mu=1}^{N} g(k_\mu) e^{ik_\mu x_n}$ $g(k_\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a \sum_{n=1}^{N} f(x_n) e^{-ik_\mu x_n}$	$f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} g(k) e^{ikx_n} dk$ $g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x_n) e^{-ikx_n}$
連続関数（$a \to 0$）	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi}{L} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} g(k_\mu) e^{ik_\mu x}$ $g(k_\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^L f(x) e^{-ik_\mu x} dx$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$ $g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$

表 1: さまざまなフーリエ変換。ただし $x_n = (n-1)a, k_\mu = 2\pi(\mu-1)/L, L = Na$ です。

この極限では、まず式 (5) の和の上限と下限が無限大になります。ただし、和の間隔 $2\pi/L$ は一定のままです。また式 (12) において和が有限区間の積分になります。したがって、この場合のフーリエ変換・逆フーリエ変換は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{2\pi}{L} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} g(k_\mu) e^{ik_\mu x} \tag{13}$$

$$g(k_\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^L f(x) e^{-ik_\mu x} dx \tag{14}$$

となります。

ここで、x が連続変数になったため、$f(x)$ を正確に表現するためには波長の短い波が必要になります。つまり波数の大きい波が必要になるので、μ に関する和の上限と下限が無限大になっています。

今度は、x 軸上で離散的な点のみの関数だが周期がない（周期が無限大）の場合のフーリエ変換を考えましょう。このような関数のフーリエ変換は、[I] の議論において $a = L/N$ を一定にしつつ $L \to \infty, N \to \infty$ とすれば実現できます。

この極限では、まず式 (11) の和が有限区間の積分になります。積分区間は式 (5) において $L \to \infty$ の極限をとることから $[-\pi/a, \pi/a]$ です。また式 (12) の和が無限和になります。したがって、この場合のフーリエ変換・逆フーリエ変換は

$$f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} g(k) e^{ikx_n} dk \tag{15}$$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a \sum_{n=1}^{N} f(x_n) e^{-ikx_n} \tag{16}$$

となります。

ここでは $f(x)$ に周期がないため、それを正確に表現するためには波長の長い波が必要になります。つまり波数の小さい波が必要になるので、μ に関する和が積分になっています。

最後に、x 軸上で連続かつ無周期の関数のフーリエ変換を考えましょう。これは式 (13) と (14) において $L \to \infty$ の極限をとるか、式 (15) と (16) において $a \to 0$ の極限をとれば

実現できます。このようにして、任意の関数 $f(x)$ は以下のようにフーリエ変換・逆フーリエ変換ができます：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk, \tag{17}$$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \tag{18}$$

以上をまとめると表 1 のようになります。

[III] 実関数・実偶関数・実奇関数のフーリエ変換

式 (17) において $f(x)$ が実関数の場合、$f(x)^* = f(x)$ から

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(k)^* e^{-ikx} dk = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \tag{19}$$

となります。左辺の積分において $k \to -k$ という変数変換をすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(-k)^* e^{ikx} dk = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \tag{20}$$

となり、したがって

$$f(x)^* = f(x) \quad \Longrightarrow \quad g(-k)^* = g(k) \tag{21}$$

であることがわかります。

次に、式 (17) において $f(x)$ が実偶関数の場合を考えましょう。つまり $f(x)^* = f(x)$ に加えて $f(-x) = f(x)$ です。このとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{-ikx} dk = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \tag{22}$$

となります。左辺の積分において再び $k \to -k$ という変数変換をすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(-k) e^{ikx} dk = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk, \tag{23}$$

つまり $g(-k) = g(k)$ となります。したがって $f(x)$ が偶関数なら $g(k)$ も偶関数であることがわかります。さらに条件 (21) を合わせると、$f(x)$ が実偶関数なら $g(k)$ も実偶関数であることがわかります。

このとき、フーリエ変換・逆フーリエ変換 (17) と (18) は以下のように変形できます。まず、式 (17) を書き直した式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} g(k) e^{ikx} dk + \int_{0}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \right) \tag{24}$$

の右辺第 1 項において $k \to -k$ という変数変換を行い、さらに $g(-k) = g(k)$ を用いると

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} g(k) \left(e^{-ikx} + e^{ikx} \right) dk \tag{25}$$

となります。これは

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(k)\cos(kx)dk \tag{26}$$

と書き直せます。全く同様にして式 (18) も

$$g(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(kx)dx \tag{27}$$

と書き直せます。つまり偶関数は偶関数の波のみに分解されることがわかります。

最後に、式 (17) において $f(x)$ が実奇関数の場合を考えましょう。つまり $f(x)^*=f(x)$ に加えて $f(-x)=-f(x)$ です。このとき [VI] と同様にすれば $g(-k)=-g(k)$ となります。したがって $f(x)$ が奇関数なら $g(k)$ も奇関数であることが分かります。さらに条件 (21) を合わせると、$g(k)=-g(-k)=-g(k)^*$ であることから、$f(x)$ が実奇関数なら $g(k)$ は純虚数の奇関数であることがわかります。

このとき、フーリエ変換 (17) は [VI] と同様にして、以下のように変形できます：

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^0 g(k)e^{ikx}dk\int_0^\infty g(k)e^{ikx}dk\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^\infty g(-k)e^{-ikx}dk+\int_0^\infty g(k)e^{ikx}dk\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty g(k)\left(-e^{-ikx}+e^{ikx}\right)dk\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty 2ig(k)\sin(kx)dk\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty h(k)\sin(kx)dk.
\end{aligned} \tag{28}$$

なお、$ig(k)=h(k)$ としました。$g(k)$ が純虚数の奇関数なので $h(k)$ は実奇関数です。全く同様にして逆フーリエ変換 (18) は

$$h(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin(kx)dk \tag{29}$$

と書き直せます。つまり奇関数は奇関数の波のみに分解されます。

[IV] 波の分散関係と位相速度・群速度

これまでは周波数 ω と波数 k の分散関係は $\omega=vk$ のように比例関係にありました。したがって波の速度 v は必ず一定でした。しかし一般には周波数 ω と波数 k は比例関係にあるとは限らず、したがって波の速度も波数 k に依存します。

たとえば N 個のおもりがバネ（バネ定数 k_{spring}）で周期的につながっている系では、「12 月 2 日分のまとめ」の式 (12)

$$\omega_\mu=\sqrt{\frac{k_{\text{spring}}}{m}}\times 2\sin\frac{p_\mu}{2} \tag{30}$$

が成り立ちます。ここで、隣り合うおもり n と $n+1$ の間の距離を a、全体の長さを $L = Na$ として

$$p_\mu = \frac{2\pi}{N}(\mu - 1) = \frac{2\pi}{L}(\mu - 1)a = k_\mu a \tag{31}$$

を使って式 (30) を変形すると

$$\omega_\mu = 2\sqrt{\frac{k_{\text{spring}}}{m}} \sin \frac{k_\mu a}{2}, \quad 0 \le k_\mu \le \frac{2\pi}{a} \tag{32}$$

となります。これは「12 月 2 日分のまとめ」の図 1 のような形をしており、分散関係は比例関係にはありません。

このようなとき、異なる波数の波を重ね合わせた波を考えましょう。そのために、フーリエ変換 (17) を拡張して、ω を k の関数とします。右向きの波を考えると

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \tag{33}$$

となります。このとき

$$v = \frac{\omega(k)}{k} \tag{34}$$

で、これを位相速度と言います。つまり個々の波数 k の成分がどのような速さで動いているかを表します。線形分散でない場合は波数 k によって位相速度が異なるので、波の形 $|f(x,t)|$ は時間と共に崩れていきます。

次に、右向きの波 $f(x,t)$ が時刻 $t = 0$ において

$$f(x,0) = e^{-ax^2 + ik_0 x} \tag{35}$$

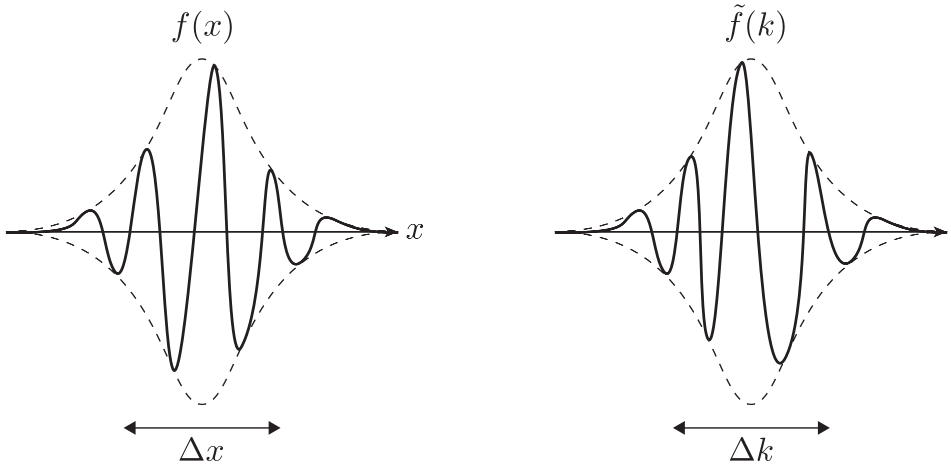
のように、およそ幅 $\Delta x \sim 1/\sqrt{a}$ の範囲に広がっていたとしましょう（図 2(a)）。つまり、波 $e^{ik_0 x}$ の振幅が e^{-ax^2} の形になっています。このような波を波束と呼びます。このとき、フーリエ変換は

$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + i(k_0 - k)x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-a \left(x - i\frac{k_0 - k}{2a} \right)^2 - \frac{(k_0 - k)^2}{4a} \right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-(k_0 - k)^2/(4a)} \end{aligned} \tag{36}$$

となります。ここで２行目から３行目には「自習用フーリエ変換ドリル（連続関数編）」の問題２ (i) を使いました。つまり、関数 $g(k)$ も図 2(b) のように幅を持った関数になっており、およそ $\Delta k \sim 2\sqrt{a}$ の範囲に広がっています。

式 (36) を式 (33) に代入すれば、波束 (35) の時間発展がわかります。そこで式 (33) の積分を、被積分関数 $g(k)$ の広がりの中心 k_0 からのずれ δk の積分に変換しましょう。つまり $k = k_0 + \delta k$ とおいて、δk について積分します：

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\delta k^2/(4a)} e^{i[(k_0 + \delta k)x - \omega(k_0 + \delta k)t]} d\delta k. \tag{37}$$



(a) (b)

図 2: (a) 幅 Δx の波束 $f(x)$。(b) それに対応する $g(k)$ は、およそ幅 Δk の範囲に広がっている。

被積分関数は δk が小さい範囲でしか値を持たないとするとテーラー展開できて

$$f(x,t) \simeq \frac{e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)}}{\sqrt{4a\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta k^2/(4a)} e^{i\delta k(x - v_{\mathrm{g}}(k_0)t)} d\delta k \tag{38}$$

という形に書けます。ここで

$$v_{\mathrm{g}}(k) = \frac{d}{dk}\omega(k) \tag{39}$$

です。簡単のため式 (38) において $X = x - v_{\mathrm{g}}(k_0)t$ とおくと

$$f(x,t) = \frac{e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)}}{\sqrt{4a\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{4a}\left(\delta k - 2iaX\right)^2 - aX^2\right] = e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} e^{-a(x - v_{\mathrm{g}}t)^2} \tag{40}$$

となります。これは、波 $e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)}$ の振幅が $e^{-a(x-v_{\mathrm{g}}t)^2}$ の形をしていることになります。

式 (40) は位相速度 $v(k_0) = \omega(k_0)/k_0$ で進む波の振幅の形全体が、別の速度 $v_{\mathrm{g}}(k_0)$ で進んでいくと解釈することができます。後者の速度を、波の形全体の速度という意味で群速度と呼びます。まとめると

$$\text{位相速度：}\ v(k) = \frac{\omega(k)}{k}, \tag{41}$$

$$\text{群速度：}\ v_{\mathrm{g}}(k) = \frac{d}{dk}\omega(k) \tag{42}$$

です。例えば式 (32) の形の分散関係の場合、位相速度は常に正（つまり波は右向き）ですが、群速度は $\pi/a < k < 2\pi/a$ の範囲で負になります。この領域では、図 2(a) の実線で示された波は右に進むのに、破線で示された波全体の形は左に進むことになります。