**振動波動論（月曜１限）：2014 年 1 月 15 日分のまとめ** 2014 年 1 月 20 日配布

担当：羽田野直道　hatano@iis.u-tokyo.ac.jp
http://hatano-lab.iis.u-tokyo.ac.jp/hatano/index-j.html

## [I] 波動方程式の一般解と初期条件を満たす解

波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,t) = v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) \tag{1}$$

は一般解として

$$f(x,t) = f_{\mathrm{R}}(x-vt) + f_{\mathrm{L}}(x+vt) \tag{2}$$

という形の解を持ちます。ここで $f_{\mathrm{R}}(X)$ と $f_{\mathrm{L}}(X)$ はいずれも $X$ に関して 2 階微分可能な任意の関数です。実際に式 (2) を式 (1) に代入すれば満たすことが確認できます。関数 $f_{\mathrm{R}}(x-vt)$ は右向きの波、関数 $f_{\mathrm{L}}(x+vt)$ が左向きの波を表します。

一般解 (2) は以下のように導けます。まず、解として変数分離の形

$$f(x,t) = g(x)h(t) \tag{3}$$

を仮定します。後述のように、最終的な一般解は、この形の解を重ね合わせて得られます。

式 (3) を波動方程式 (1) に代入して変形すると

$$\frac{1}{h}\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{v^2}{g}\frac{d^2g}{dx^2} \tag{4}$$

となります。この式の左辺は時間 $t$ のみの関数、右辺は空間 $x$ のみの関数です。両者が常に等しいためには、実際には定数であるはずです。そこでその定数を $C$ とすると、

$$\frac{d^2h}{dt^2} = Ch, \qquad \frac{d^2g}{dx^2} = \frac{C}{v^2}g \tag{5}$$

となります。式 (5) の第 1 式の一般解は

$$h(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \tag{6}$$

となります。ただし $C = -\omega^2$ です。$C > 0$ の場合には $\omega$ が純虚数になりますが、振動する解ではないので、ここでは $C < 0$ の場合のみを考えます。

さて、$C = -\omega^2$ を式 (5) の第 2 式に代入して一般解を書くと

$$g(x) = De^{ikx} + Ee^{-ikx} \tag{7}$$

となります。ただし $k$ は式 (6) の $\omega$ と線形分散

$$\omega = vk \tag{8}$$

という形で関係しています。したがって式 (3) は

$$\begin{aligned} f(x,t) &= AEe^{i(\omega t-kx)} + BCe^{-i(\omega t-kx)} + ADe^{i(\omega t+kx)} + BEe^{-i(\omega t+kx)} & (9)\\ &= AEe^{-ik(x-vt)} + BCe^{ik(x-vt)} + ADe^{ik(x+vt)} + BEe^{-ik(x+vt)} & (10) \end{aligned}$$

となります。

式 (9) の右辺第 1 項は、$x$ を固定すると $t$ とともに位相が増える振動ですが、右へ行くほど（$x$ を大きくするほど）位相が遅れます。このとき波は右へ進みます。右辺第２項も右へ進む波を表しています。一方、右辺第３項と第４項は左へ進む波を表しています。

さて、式 (10) は $C=-\omega^2=-v^2k^2$ と選んだ場合の解なので、最終的な一般解は任意の $k$ について重ね合わせたものです。そこで式 (10) を

$$f_k(x,t)=A(k)e^{-ik(x-vt)}+B(k)e^{ik(x-vt)}+D(k)e^{ik(x+vt)}+E(k)e^{-ik(x+vt)} \tag{11}$$

と書き直すことにします。一般解は

$$\begin{aligned} f(x,t)&=\int f_k(x,t)dk \\ &=\int dk[A(k)e^{-ik(x-vt)}+B(k)e^{ik(x-vt)}+D(k)e^{ik(x+vt)}+E(k)e^{-ik(x+vt)}] \end{aligned} \tag{12}$$

となります。上の４つの項は、それぞれ関数 $A(k)$, $B(k)$, $D(k)$, $E(k)$ のフーリエ変換の形をしています。フーリエ変換をそれぞれ $\tilde{A}(x)$, $\tilde{B}(x)$, $\tilde{D}(x)$, $\tilde{E}(x)$ とすると、

$$f(x,t)=\tilde{A}(-(x-vt))+\tilde{B}(x-vt)+\tilde{D}(x+vt)+\tilde{E}(-(x+vt)) \tag{13}$$

となります。関数 $A(k)$, $B(k)$, $D(k)$, $E(k)$ は任意に選べるのでフーリエ変換 $\tilde{A}(x)$, $\tilde{B}(x)$, $\tilde{D}(x)$, $\tilde{E}(x)$ も任意です。そのため式 (13) を式 (2) の形にまとめることができます。こうして一般解が得られました。

### [II] 波動方程式の初期条件を満たす解

初期条件として

$$f(x,0)=u_0(x), \qquad \left.\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|_{t=0}=v_0(x) \tag{14}$$

とします。式 (14) の第 1 式は媒質の各部分の初期位置を、第２式はその初期速度を指定しています。一般解 (2) に初期条件 (14) の第 1 式と第２式を課すと

$$f_{\mathrm{R}}(x)+f_{\mathrm{L}}(x)=u_0(x), \qquad -v\frac{d}{dx}f_{\mathrm{R}}(x)+v\frac{d}{dx}f_{\mathrm{L}}(x)=v_0(x) \tag{15}$$

となります。第２式は $x$ で積分して

$$-f_{\mathrm{R}}(x)+f_{\mathrm{L}}(x)=\frac{v_1(x)}{v} \tag{16}$$

となります。ただし

$$v_1(x)=\int v_0(x)dx \tag{17}$$

です。（積分定数は最終的な解に影響しないことが以下でわかります。）式 (15) と (16) から

$$f_{\mathrm{R}}(x)=\frac{1}{2}\left(u_0(x)-\frac{v_1(x)}{v}\right) \tag{18}$$

$$f_{\mathrm{L}}(x)=\frac{1}{2}\left(u_0(x)+\frac{v_1(x)}{v}\right) \tag{19}$$

となり、したがって解 (2) は

$$f(x,t)=\frac{1}{2}(u_0(x-vt)+u_0(x+vt))+\frac{1}{2v}(-v_1(x-vt)+v_1(x+vt)) \tag{20}$$

と求められます。ここで、$v_1(x)$ の積分定数がキャンセルされることがわかります。

特に $t=0$ で弦を $u_0(x)$ の形に静止させて、ゆっくり手を離したとき、$v_0(x)=0$ なので、その後の運動は

$$f(x,t)=\frac{1}{2}(u_0(x-vt)+u_0(x+vt)) \tag{21}$$

となります。つまり、最初の弦の形 $u_0(x)$ のうち半分が右に、半分が左に、形を保ったまま進みます。

### [III] 固定端

原点 $x=0$ に固定端があり、弦の振動は領域 $x>0$ に限られるとしましょう。この波を考える際には、実際には $x<0$ の領域まで含めて波動方程式を解くのが便利です。境界条件としては

$$^{\forall}t, f(0,t)=0 \tag{22}$$

です。一般解 (2) において $x=0, vt=X$ とおくと

$$f_{\mathrm{L}}(X)=-f_{\mathrm{R}}(-X) \tag{23}$$

となります。したがって、境界条件 (22) を満たす解は

$$f(x,t)=f_{\mathrm{R}}(x-vt)-f_{\mathrm{R}}(-(x+vt)) \tag{24}$$

で与えられます。この解の特徴は

$$f(-x,t)=-f(x,t) \tag{25}$$

となっていることです。つまり波は常に原点に関して奇関数です。したがって、領域 $x>0$ に左向きの波 $f_{\mathrm{L}}(x+vt)=-f_{\mathrm{R}}(-(x+vt))$ が存在すると、それを反転させた波 $-f_{\mathrm{R}}(x-vt)$ が領域 $x<0$ を右向きに進みます。左向きの波が $x>0$ から固定端 $x=0$ に入射して $x<0$ に抜けると同時に、右向きの波が $x<0$ から固定端 $x=0$ から $x>0$ に姿を現します。

### [IV] ２つの固定端

原点 $x=0$ に加えて $x=L$ にも固定端があり、弦の振動は領域 $0<x<L$ に限られるとしましょう。この波を考える際にも、$x<0$ や $x>L$ の領域まで含めて波動方程式を解くのが便利です。境界条件としては

$$^{\forall}t, f(0,t)=0, \quad f(L,t)=0 \tag{26}$$

です。前節と同様にすると、まず $x=0$ での境界条件から

$$f(x,t)=f_{\mathrm{R}}(x-vt)-f_{\mathrm{R}}(-x-vt) \tag{27}$$

でかけることがわかります。次に $x = L$ での境界条件から

$$f_{\mathrm{R}}(L - vt) = f_{\mathrm{R}}(-L - vt) \tag{28}$$

であることがわかります。わかりやすいように $X = -L - vt$ とおくと、式 (28) は

$$f_{\mathrm{R}}(X + 2L) = f_{\mathrm{R}}(X) \tag{29}$$

と書き直せます。つまり $f_{\mathrm{R}}(X)$ は周期 $2L$ の周期関数でなければなりません。

領域 $0 < x < L$ に左向きの波 $f_{\mathrm{L}}(x + vt) = -f_{\mathrm{R}}(-x - vt)$ が存在すると、それを反転させた波 $f_{\mathrm{R}}(x - vt)$ が領域 $-L < x < 0$ を右向きに進みます。さらに領域 $L < x < 2L$ に左向きの波 $f_{\mathrm{L}}(x + vt - 2L) = -f_{\mathrm{R}}(-x - vt + 2L)$ が存在します。

左向きの波 $f_{\mathrm{L}}(x + vt) = -f_{\mathrm{R}}(-x - vt)$ が $x > 0$ から固定端 $x = 0$ に入射して $x < 0$ に抜けると同時に、右向きの波 $f_{\mathrm{R}}(x - vt)$ が $x < 0$ から固定端 $x = 0$ を通って $x > 0$ に姿を現します。この右向きの波が $x < L$ から固定端 $x = L$ に入射して $x > L$ に抜けると同時に、左向きの波 $f_{\mathrm{L}}(x + vt - 2L) = -f_{\mathrm{R}}(-x - vt + 2L)$ が $x > L$ から固定端 $x = L$ を通って $x < L$ に姿を現します。これを繰り返して、$0 < x < L$ の間で反射が繰り返されます。

**[V] 定在波**

前節のように $x = 0$ と $x = L$ に固定端がある状況では、$f_{\mathrm{R}}(X)$ が周期 $2L$ の周期関数になります。最も簡単な周期関数として、$f_{\mathrm{R}}$ が正弦波

$$f_{\mathrm{R}}(X) = A \sin(kX) \tag{30}$$

である場合を考えましょう。なお、係数 $A$ は振幅を表す正の数、$k$ は波数です。式 (30) が周期 $2L$ であるためには、波数 $k$ は

$$2Lk = 2n\pi, \quad \text{すなわち} \quad k = \frac{\pi}{L}n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{31}$$

に限定されます。

このとき解 (27) は

$$\begin{aligned} f(x,t) &= A \sin[k(x - vt)] - A \sin[k(-x - vt)] \\ &= A \left[\sin(kx - \omega t) - \sin(-kx - \omega t)\right] \qquad (32) \\ &= 2A \sin(kx) \cos(\omega t) \qquad (33) \end{aligned}$$

となります。ここで

$$\omega = vk \tag{34}$$

は周波数です。周波数と波数の関係式を一般に分散関係と呼びます。今の場合は単なる比例関係ですが、一般には波の速度 $v$ も $k$ に依存します。

式 (33) は $kx$ と $\omega t$ が別々になっているので進行波ではなく、同じ所にとどまっています。これが定在波です。式 (31) において $n = 1$ の場合が、$0 < x < L$ の範囲で節のない定在波、$n = 2$ が節 1 つの定在波に対応しています。