振動波動論（月曜１限）：2013 **年** 12 **月** 16 **日分のまとめ** 2014 年 1 月 15 日配布

担当：羽田野直道 hatano@iis.u-tokyo.ac.jp
http://hatano-lab.iis.u-tokyo.ac.jp/hatano/index-j.html

[I] 波動方程式の導出（縦波）

断面が $d \times d$ の長い金属棒を考えます（図 1）。この金属棒を長さ a の単位胞（つまり各辺が a の立方体）に分割し、この単位胞をバネでつながれた重りになぞらえます。個々の重りの質量 m は、金属の密度 ρ を使って $m = \rho d^2 a$ と表されます。金属棒の x の位置に存在する単位胞の時刻 t における振動を $f(x,t)$ と書くことにします。

この単位胞に隣の単位胞から力 F がかかり、それに応じて単位胞の長さが $a \to a + \Delta a$ と変化したとしましょう。圧力に対して、単位長さあたりの長さ変化率 $\Delta a/a$ がどれくらいになるかを表すのが「ヤング率」Y です。圧力は単位面積当たりの力なので、今の場合は圧力は F/d^2 です。つまり

$$\frac{F}{d^2} = -Y\frac{\Delta a}{a} \tag{1}$$

となります。これをバネの伸びに対するフックの法則と比較しましょう。式 (1) をフックの法則の形に書き直すと、$F = -(Yd^2/a)\Delta a$ となるので、バネ定数が Yd^2/a に相当することがわかります。

つまり、図 1 の金属棒は多数の重り（質量 $\rho d^2 a$）がバネ（バネ定数 Yd^2/a）で繋がれていると近似することができます。したがって、個々の単位胞の運動方程式は

$$\rho d^2 a \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) = \frac{Yd^2}{a}(f(x+a,t) + f(x-a,t) - 2f(x,t)) \tag{2}$$

と書けると考えられます。

さらに $a \to 0$ の極限を考えます。そこで関数 $f(x \pm a, t)$ を a に関してテーラー展開すると

$$f(x \pm a,t) = f(x,t) \pm a\frac{\partial}{\partial x}f(x,t) + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) \pm \frac{a^3}{3!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) + \mathrm{O}(a^4) \tag{3}$$

となります。ここで $\mathrm{O}(a^4)$ というのは「a^4 のオーダーおよびそれより高次の項」という意味です。式 (3) から

$$f(x+a,t) + f(x-a,t) - 2f(x,t) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) + \mathrm{O}(a^4) \tag{4}$$

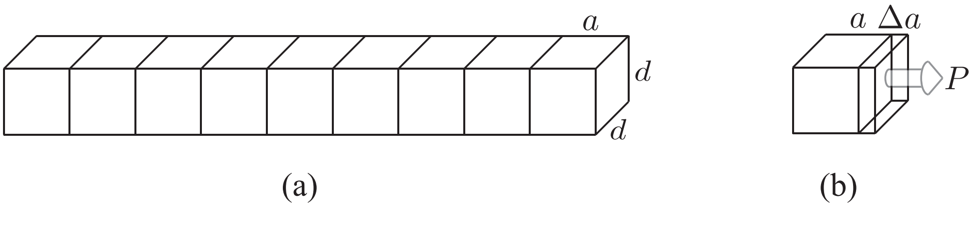

図 1: (a) 単面積 d^2 の金属棒を長さ a の単位胞に分割します。(b) 断面に圧力 $P = F/d^2$ がかかったとき、単位胞が Δa だけのびるとします。

となります。これを式 (2) に代入して $a \to 0$ の極限をとると

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) \tag{5}$$

という式が得られます。ここで

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \tag{6}$$

です。式 (5) が波動方程式、つまり波 $f(x,t)$ の時間変化を記述する運動方程式です。

[I] 波動方程式の導出（横波）

弦が振動している状況を考えます。弦の線密度を ρ_ℓ、張力を T とします。弦の振動の形が $f(x,t)$ で変化するとします。この関数が満たす微分方程式を導きます。

そこで弦を幅 a の区間に離散化して考えます（図 2）。分割された個々の部分は質量 $\rho_\ell a$ の重りと考え、そこに右の重りと左の重りから張力がかかっていると見なします。重りの上下方向の運動方程式は

$$\rho_\ell a \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) = T \sin\theta(x) - T \sin\theta(x-a) \tag{7}$$

となります。ここで $\theta(x)$ と $\theta(x-a)$ は図 2 に示されている角度であり、

$$\tan\theta(x) = \frac{f(x+a,t) - f(x,t)}{a} \tag{8}$$

$$\tan\theta(x-a) = \frac{f(x,t) - f(x-a,t)}{a} \tag{9}$$

で与えられます。弦の振動が大きくないとすると $\theta(x)$ や $\theta(x-a)$ は小さい値なので、$\sin\theta(x) \simeq \tan\theta(x), \sin\theta(x-a) \simeq \tan\theta(x-a)$ と近似できます。したがって式 (7) は

$$\rho_\ell a \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) = \frac{T}{a}(f(x+a,t) + f(x-a,t) - 2f(x,t)) \tag{10}$$

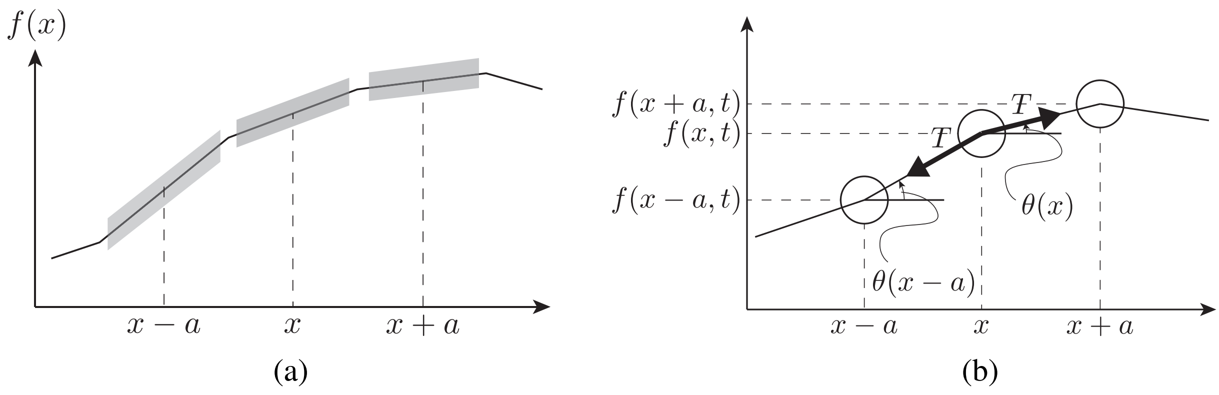

図 2: (a) 弦を幅 a に離散化します。(b) 離散化した各部分を重りと考え、そこに働く張力による運動方程式をたてます。

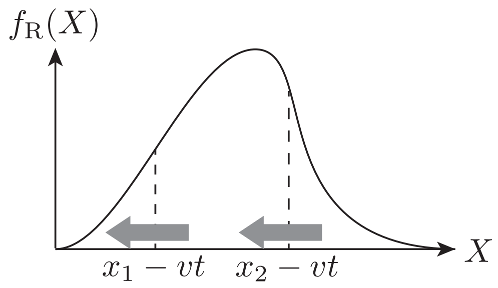

図 3: 関数 $f_{\mathrm{R}}(X)$ の形と $X = x_1 - vt, X = x_2 - vt$ における値。時間の経過とともに、それぞれの点が左へ進むので、関数 $f_{\mathrm{R}}(X)$ を右から左へスキャンします。

と書き直せます。

この右辺に再び式 (4) を使って極限 $a \to 0$ をとると式 (5) と同じ形の波動方程式が得られます。ただし、波の速さは縦波とは異なり、

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_\ell}} \tag{11}$$

で与えられます。

[III] 波動方程式の一般解：右向きの波と左向きの波

波動方程式 (5) は一般解として

$$f(x,t) = f_{\mathrm{R}}(x - vt) + f_{\mathrm{L}}(x + vt) \tag{12}$$

という形の解を持ちます。ここで $f_{\mathrm{R}}(X)$ と $f_{\mathrm{L}}(X)$ はいずれも X に関して 2 階微分可能な任意の関数です。実際に式 (12) を式 (5) に代入すれば満たすことが確認できます。

関数 $f_{\mathrm{R}}(x - vt)$ は右向きの波を表します。例えば関数 $f_{\mathrm{R}}(X)$ が図 3 のような山形の関数だったとします。ある場所 x_1 における波の振動は、時間の経過とともに $X = x_1 - vt$ に従って関数 $f_{\mathrm{R}}(X)$ を右から左へスキャンしていきます。それよりも右にある場所 $x_2 (> x_1)$ では、$X = x_2 - vt$ に従って、$X = x_1 - vt$ より**遅れて**スキャンしていきます。右にある場所ほど振動が遅れるので、波は右へ進みます。同様に関数 $f_{\mathrm{L}}(x + vt)$ は左へ進む波です。また、単位長さ当たり v だけ時間が遅れることから、速さが v であることがわかります。

式 (12) は以下のように導けます。まず、変数分離形の解

$$f(x,t) = g(x)h(t) \tag{13}$$

を求めましょう。一般解は、様々な種類の変数分離形 (13) を重ね合わせたものです。

式 (13) を式 (5) に代入すると

$$g(x)\frac{d^2}{dt^2}h(t) = v^2 h(t)\frac{d^2}{dx^2}g(x) \tag{14}$$

となります。両辺を $g(x)h(t)$ で割ると

$$\frac{1}{h(t)}\frac{d^2}{dt^2}h(t) = v^2 \frac{1}{g(x)}\frac{d^2}{dx^2}g(x) \tag{15}$$

となります。左辺は t だけの関数、右辺は x だけの関数なので、両者が常に等しいということは定数でなければなりません。その定数を C とおきましょう。すると

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) = Ch(t), \tag{16}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}g(x) = \frac{C}{v^2}g(x) \tag{17}$$

が得られます。

式 (16) の一般解は

$$h(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \tag{18}$$

です。ただし $C = -\omega^2$ です。この定数を使って (17) を解くと、一般解は

$$g(x) = De^{ikx} + Ee^{-ikx} \tag{19}$$

です。ただし、k は ω と

$$k = \frac{\omega}{v} \tag{20}$$

という関係を満たしていなければなりません。これらを式 (13) に代入すると、

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \left(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\right)\left(De^{ikx} + Ee^{-ikx}\right) \\ &= BDe^{i(kx-\omega t)} + AEe^{-i(kx-\omega t)} + ADe^{i(kx+\omega t)} + BEe^{-i(kx+\omega t)} \\ &= BDe^{ik(x-vt)} + AEe^{-ik(x-vt)} + ADe^{ik(x+vt)} + BEe^{-ik(x+vt)} \end{aligned} \tag{21}$$

となります。

式 (21) は、定数 C を $-(kv)^2$ に選んだときの解です。そこで

$$f_k(x,t) = A(k)e^{ik(x-vt)} + B(k)e^{-ik(x-vt)} + C(k)e^{ik(x+vt)} + D(k)e^{-ik(x+vt)} \tag{22}$$

と表すことにしましょう。実際には k はどんな値でも良いので、一般解は様々な k に関して式 (22) を重ね合わせて

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \int f_k(x,t)dk \\ &= \int A(k)e^{ik(x-vt)}dk + \int B(k)e^{-ik(x-vt)}dk \\ &\quad + \int C(k)e^{ik(x+vt)}dk + \int D(k)e^{-ik(x+vt)}dk \end{aligned} \tag{23}$$

という形に書けます。係数の $A(k), B(k), C(k), D(k)$ は全て k に関して任意の関数です。

さて、右辺の４つの項はいずれも連続変数のフーリエ変換の形をしています。そこで、４つの関数 $A(k), B(k), C(k), D(k)$ のフーリエ変換を $p(x), q(x), r(x), s(x)$ とおくと

$$f(x,t) = p(x-vt) + q(-x+vt) + r(x+vt) + s(-x-vt) \tag{24}$$

となります。改めて $f_{\mathrm{R}}(x) = p(x) + q(-x)$, $f_{\mathrm{L}}(x) = r(x) + s(-x)$ とすれば式 (12) が得られます。４つの関数 $A(k), B(k), C(k), D(k)$ が全て任意の関数なので、そのフーリエ変換である $f_{\mathrm{R}}(x)$ と $f_{\mathrm{L}}(x)$ も任意の関数です。