振動波動論（月曜１限）：2013 年 12 月 9 日分のまとめ 2013 年 12 月 16 日配布

担当：羽田野直道 hatano@iis.u-tokyo.ac.jp
http://hatano-lab.iis.u-tokyo.ac.jp/hatano/index-j.html

[I] フーリエ変換

N 個のおもりの系で波を考えるために、以下のように記号を変更します。
おもりの釣り合いの位置：

$$n = 1, 2, \cdots, N \qquad \longrightarrow \qquad x_1 = 0, x_2 = a, x_3 = 2a, \cdots, x_N = (N-1)a. \tag{1}$$

おもりの釣り合いの位置からのずれ：

$$x_n \qquad \longrightarrow \qquad f(x_n). \tag{2}$$

基準振動モードの「波数」：

$$p_\mu = \frac{2\pi}{N}(\mu - 1) \qquad \longrightarrow \qquad k_\mu = \frac{p_\mu}{a} = \frac{2\pi}{L}(\mu - 1). \tag{3}$$

基準振動モードの振幅：

$$y_\mu \qquad \longrightarrow \qquad g(k_\mu). \tag{4}$$

これまでの記号によると

$$\vec{x} = U\vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \tag{5}$$

の第 n 成分は

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\vec{u}_1 y_1 + \vec{u}_2 y_2 + \cdots \vec{u}_N y_N\right)_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(y_1 e^{ip_1(n-1)} + y_2 e^{ip_2(n-1)} + \cdots + e^{ip_N(n-1)}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^{N} y_\mu e^{ip_\mu(n-1)} \end{aligned} \tag{6}$$

となりますが、これを新しい記号で書くと

$$f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^{N} g(k_\mu) e^{ik_\mu x_n} \tag{7}$$

となります。また、これまでの記号によると

$$\vec{y} = U^\dagger \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^\dagger \\ \vec{u}_2^\dagger \\ \vdots \\ \vec{u}_N^\dagger \end{pmatrix} \vec{x} \tag{8}$$

の第 μ 成分は

$$
\begin{aligned}
y_\mu &= \vec{u}_\mu^\dagger \vec{x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} e^{-ip_\mu(n-1)} x_n
\end{aligned}
\tag{9}
$$

となりますが、これを新しい記号で書くと

$$
g(k_\mu) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) e^{-ik_\mu x_n} \tag{10}
$$

です。式 (7) は、バネ全体の振動を基準振動モードに分解しています。その係数 $g(k_\mu)$ を、式 (10) で求めています。

式 (7) の右辺に式 (10) を代入して、$f(x_n)$ に戻ることを示しましょう。まず

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^{N} f(x_m) e^{-ik_\mu x_m} \right) e^{ik_\mu x_n} &= \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} f(x_m) e^{ik_\mu (x_n - x_m)} \\
&= \sum_{m=1}^{N} f(x_m) \left[\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{N} e^{ik_\mu (x_n - x_m)} \right]
\end{aligned}
\tag{11}
$$

となります。右辺の括弧の中は、まず $x_n = x_m$ のときは 1 を N 回足すので、

$$
\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{N} e^{ik_\mu (x_n - x_m)} = 1, \qquad x_n = x_m \text{ の場合} \tag{12}
$$

となります。また $x_n \neq x_m$ のときは等比級数なので

$$
\frac{1}{N} \frac{1 - e^{2\pi i / L \times N (x_n - x_m)}}{1 - e^{2\pi i / L \times (x_n - x_m)}} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{2\pi i (n-m)}}{1 - e^{2\pi i (n-m)/N}} = 0 \tag{13}
$$

となります。以上から

$$
\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{N} e^{ik_\mu (x_n - x_m)} = \delta_{nm} \tag{14}
$$

です。これを式 (11) の右辺に代入して

$$
\sum_{m=1}^{N} f(x_m) \delta_{nm} = f(x_n) \tag{15}
$$

となり、式 (7) の左辺に戻りました。