

[I] N 自由度の周期的な系の基準振動

同じ質量 m の N 個の重りが同じ強さ k の N 個のバネで直列に**周期的につな**がれている系を考えます。重りが静止している状態で、バネは全て自然長であるとします。

これら N 個のおもりの変位を

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} \quad (1)$$

とすると、この系の運動方程式は

$$m\ddot{\vec{x}} = -kA\vec{x} \quad (2)$$

の形に表現され、行列 K は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

となります。この行列は以下の形の固有ベクトルを持つことが確認できます：

$$\vec{u}_\mu = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{ip_\mu} \\ e^{2ip_\mu} \\ e^{3ip_\mu} \\ \vdots \\ e^{(N-2)ip_\mu} \\ e^{(N-1)ip_\mu} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

ただし

$$p_\mu = \frac{2\pi}{N}(\mu - 1), \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, N - 1, N \quad (5)$$

です。これによって $\vec{u}_1$ から $\vec{u}_N$ までの N 個の固有ベクトルを指定したことになります。これらは

$$(\vec{u}_\mu)^\dagger \vec{u}_\nu = \delta_{\mu\nu} \quad (6)$$

を満たすので、正規直交基底になっています。

これらの固有ベクトルは、系全体に広がる波を表しています。まず $\vec{u}_1$ は、全てのおもりが一斉に同じだけ動く波、 $\vec{u}_2$ は N 個のおもり全体が一つの波長となっている「基本音」、 $\vec{u}_3$ は「倍音」といった具合です。このため、行列 A でなくても、並進対称性がある系では一般に固有ベクトルが式 (4) のようになります。

式 (3) の行列 A を式 (4) の固有ベクトル $\vec{u}_\mu$ に演算することによって、実際にベクトル $\vec{u}_\mu$ が行列 A の固有ベクトルであることが確認できます。そのとき、固有値が

$$\lambda_\mu = 2 - 2 \cos p_\mu \quad (7)$$

$$= 4 \sin^2 \frac{p_\mu}{2} \quad (8)$$

であることがわかります。

以上から、ユニタリ行列

$$U = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{2\pi i/N} & e^{4\pi i/N} & \cdots & e^{2(N-1)\pi i/N} \\ 1 & e^{4\pi i/N} & e^{8\pi i/N} & \cdots & e^{4(N-1)\pi i/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{2(N-1)\pi i/N} & e^{4(N-1)\pi i/N} & \cdots & e^{2(N-1)^2\pi i/N} \end{pmatrix} \quad (9)$$

によって行列 A は

$$U^\dagger A U = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix} \quad (10)$$

と対角化されます。新しい変数 $\vec{y} = U^\dagger \vec{x}$ を定義すると、この変数に対する運動方程式は

$$m \ddot{y}_\mu = -k \lambda_\mu y_\mu \quad (11)$$

となり、 μ 番目のモードは周波数

$$\omega_\mu = \sqrt{\frac{k}{m}} \times 2 \sin \frac{p_\mu}{2} \quad (12)$$

の波であることがわかります。

補足：式 (12) において、 p_μ は波が空間にどのように広がっているかを表す「波数」、 ω_μ は波が時間的にどのように変動するかを表す「周波数」です。このように波の空間の広がり と時間の広がり の関係を表す式を「分散関係」と呼びます (図 1)。

また、図 1 からわかるように、 p_μ の 2 つの値に対して固有値が縮退しています。この 2 つの固有値の縮退の間では、任意の線形結合が固有状態になります。この性質を使うと、固有ベクトルを式 (??) のような複素数ベクトルではなく、実数ベクトルにとることもで

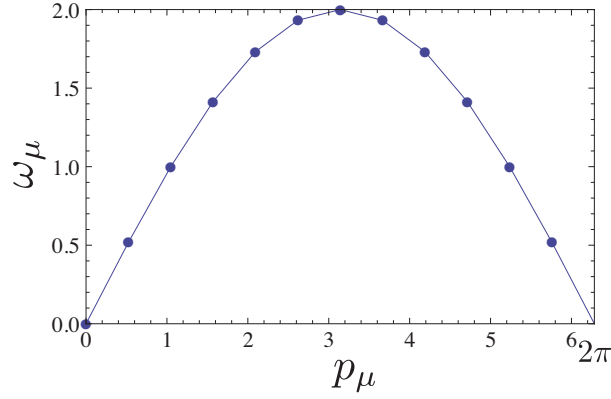


図 1: 分散関係 (12)。ここでおもりの数は $N = 12$ で、また $\sqrt{k/m} = 1$ としました。

きます。実際に、固定端の場合の固有ベクトル（「11月11日分のまとめ」の式(8)）は、そのような形をしています。

[II] フーリエ変換

N 個のおもりの系で波を考えるために、以下のように記号を変更します。まず、おもりのつりあいの位置を $n = 1, 2, \dots, N$ という記号から、 x 軸上の位置

$$x_1 = 0, \quad x_2 = a, \quad x_3 = 2a, \dots, \quad x_N = (N-1)a \quad (13)$$

に変更します。つまり、 N 個のおもりが間隔 a で並んでいるとします。なお、

$$x_{N+1} = Na \quad (14)$$

ですが、周期的境界条件を課しているので

$$x_{N+1} = x_1 = 0 \quad (15)$$

です。つまり系の長さが Na であることになります。そこでこれを

$$L = Na \quad (16)$$

とおきます。

次に、 n 番目のおもりの振動を x_n から $f(x_n)$ に変更します。これによって、 N 個のおもり全体の振動を図 2(a) のように折れ線グラフで表せます。関数 $f(x)$ は a ごとに値を持ち、 L を周期とする関数です。

次に、基準振動モードは、これまで式 (5) の p_μ で表してきましたが、これからは「波数」

$$k_\mu = \frac{p_\mu}{a} \quad (17)$$

で表します。具体的には

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{2\pi}{L}, \quad k_3 = \frac{4\pi}{L}, \dots, \quad k_N = \frac{2(N-1)\pi}{L} \quad (18)$$

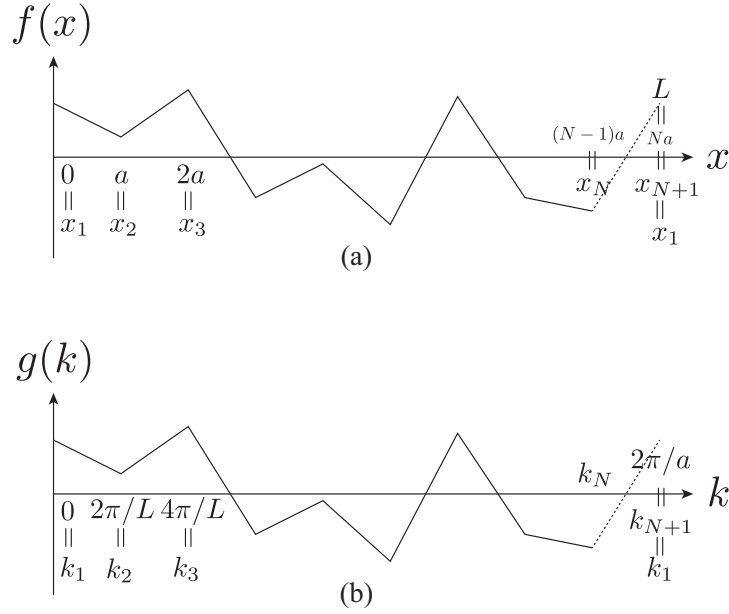


図 2: (a) $x = x_1 = 0, x = x_2 = a, x = x_3 = 2a, \dots$ の位置にあるおもりの振動を $f(x_n)$ とすると、系全体の振動が折れ線グラフで表せます。(b) おもりの振動の広がり $k = k_1 = 0, k = k_2 = 2\pi/L, k = k_3 = 4\pi/L, \dots$ の波数の振動に分解した係数を $g(k_n)$ とすると、係数が折れ線グラフで表せます。

です。ここで $L = Na$ は式 (16) で与えられた系全体の長さです。

「波数」は単位長さ当たりどれくらいの波が入っているかという数を表します。したがって $k_1 = 0$ は系が波をうっておらず、系全体が一斉に同じだけ動いている様子を表します。それに対して $k_2 = 2\pi/L$ は、長さ L の系の中に位相 2π が入っている状態を表しているので「基本音」、 $k_3 = 4\pi/L$ は、長さ L の系の中に位相 4π が入っているので「倍音」を表しています。なお、

$$k_{N+1} = \frac{2N\pi}{L} = \frac{2\pi}{a} \quad (19)$$

ですが、これは間隔 a の間に一つの波が入っている状態です。ところが今はおもりが間隔 a で並んでいて、その途中には振動する要素がないので、間隔 a の中で波を打っているのは、波を打っていない状態と同じです。つまり

$$k_{N+1} = k_1 = 0 \quad (20)$$

という周期的境界条件が「波数」においても成り立っています。

最後に、波 $f(x)$ の中に μ 番目の基準振動モードがどれくらい含まれているかを y_μ で表していましたが、これを $g(k_\mu)$ と書くことにします。これによって、振動モードの混ざり具合を図 2(b) のように折れ線グラフで表せます。関数 $g(k)$ は $2\pi/L$ ごとに値を持ち、 $2\pi/a$ を周期とする関数です。