振動波動論（月曜１限）：2013 年 11 月 11 日分のまとめ　　2013 年 11 月 18 日配布

担当：羽田野直道　hatano@iis.u-tokyo.ac.jp
http://hatano-lab.iis.u-tokyo.ac.jp/hatano/index-j.html

[I] N 自由度系（固定端）の基準振動

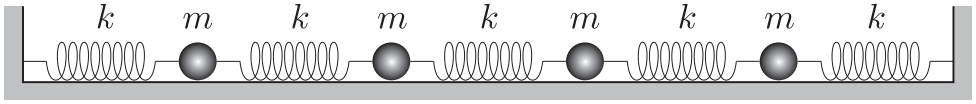

図 1: N 個の重りがバネで繋がれている系。

図 1 のように N 個のおもり（全て質量 m）が一直線にバネ（全てバネ定数 k）で繋がれている系の振動を考えます。それぞれのおもりの、釣り合いの一からのずれを x_n ($n = 1, 2, \cdots, N$) と表します。この系の運動方程式は

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1), \tag{1}$$

$$m\ddot{x}_n = -k(x_n - x_{n-1}) + k(x_{n+1} - x_n) \quad n = 2, 3, \cdots, N-1, \tag{2}$$

$$m\ddot{x}_N = -k(x_N - x_{N-1}) - kx_N \tag{3}$$

です。これを

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \tag{4}$$

と使ってまとめると

$$m\ddot{\vec{x}} = -kA\vec{x}, \tag{5}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

と表せます。この行列 A の固有値と固有ベクトルが、この系の基準振動モードを表します。

行列 A は $N \times N$ 行列なので、N 個の固有値と固有ベクトルがあります。それらは

$$\lambda_l = 2(1 - \cos p_l), \tag{7}$$

$$\vec{u}_l = \frac{1}{\sqrt{2(N+1)}} \begin{pmatrix} \sin(p_l) \\ \sin(2p_l) \\ \sin(3p_l) \\ \vdots \\ \sin(Np_l) \end{pmatrix} \tag{8}$$

で与えられます。ただし

$$p_l = \frac{\pi}{N+1} l \tag{9}$$

です。固有ベクトルは正規直交系を組んでいます：

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_{ij}. \tag{10}$$

ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタです。

固有ベクトルから

$$U = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_N \end{pmatrix} \tag{11}$$

という直交行列を作ると、行列 A が

$$U^T A U = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix} \tag{12}$$

の形に対角化されます。基準振動を表す変数 y_l（$l = 1, 2, \cdots, N$）を

$$\vec{y} = U^T \vec{x} \tag{13}$$

と導入すると、これらの変数に対する運動方程式は

$$m\ddot{\vec{y}} = -k\Lambda\vec{y} \tag{14}$$

つまり

$$m\ddot{y}_l = -k\lambda_l y_l \tag{15}$$

のように分解されます。この一般解は

$$y(t) = A_l e^{i\omega_l t} + B_l e^{-i\omega_l t} \tag{16}$$

となり、ここで周波数は

$$\omega_l = \sqrt{\frac{k}{m}\lambda_l} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\frac{p_l}{2} \tag{17}$$

です。これは $l=1$ が長さ $N+1$ の弦の基本音、$l=2$ がその倍音、$l=3$ が 3 倍音、という振動を表しています。

初期条件として、あるベクトル $\vec{x}(0)$ を考えましょう。このとき、各基準振動の初期条件は

$$\vec{y}(0) = U^T \vec{x}(0) \tag{18}$$

つまり

$$y_l(0) = \vec{u}_l^T \vec{X} = \vec{u}_l \cdot \vec{x}(0) \tag{19}$$

で与えられます。これはちょうど、ベクトル $\vec{x}(0)$ を固有振動モードに分解した形

$$\vec{x}(0) = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \cdots + \alpha_N \vec{u}_N \tag{20}$$

の係数 α_l を求めていることに相当します：

$$\alpha_l = \vec{u}_l \cdot \vec{x}(0). \tag{21}$$

後で勉強するフーリエ変換は、いろいろな振動を基本音、倍音、3 倍音などの成分に分解することを意味します。式 (20) の形に分解したときの係数を式 (21) の形で求めるのがフーリエ変換に相当します。