

[I] 基準振動：力学的エネルギーの分離

バネ定数の行列を対角化して得られた $\vec{y}$ の各成分を基準振動と呼びます。元々のおもりの振動は互いに絡み合っていますが、対角化して基準振動で見ることによって、絡み合いがほどけ、独立した振動子の重ね合わせと見るができるようになります。力学的エネルギーも、元々のおもりの振動としてみると

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} [k_0 x_1^2 + k_1 (x_2 - x_1)^2 + k_2 x_2^2] \quad (1)$$

$$= \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^T \dot{\vec{x}} + \frac{1}{2} \vec{x}^T K \vec{x} \quad (2)$$

となりますが、基準振動で見ると

$$E = E_1 + E_2 = \left(\frac{m}{2} \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m \omega_1^2 y_1^2 \right) + \left(\frac{m}{2} \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} m \omega_2^2 y_2^2 \right) \quad (3)$$

のように、独立した2つの調和振動子の力学的エネルギーの和の形になります。

式(3)は以下のように導けます。行列 K が直交行列 U によって

$$U^T K U = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

と対角化されるとすると、直交行列が $U U^T = I$ を満たすことを使って

$$\dot{\vec{x}}^T \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}^T U U^T \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{y}}^T \dot{\vec{y}} \quad (5)$$

$$\vec{x}^T K \vec{x} = \vec{x}^T U U^T K U U^T \vec{x} = \vec{y}^T \Lambda \vec{y} \quad (6)$$

となります。ここで

$$\vec{y} = U^T \vec{x}, \quad \dot{\vec{y}} = U^T \dot{\vec{x}}, \quad \vec{y}^T = (U^T \vec{x})^T = \vec{x}^T U, \quad (7)$$

を使っています。

[II] 線形写像の表現論：対角化の意味

行列を線形写像の表現と考える「表現論」を簡単にまとめます。簡単のため、全て2次元で説明します。

(i) 線形写像（一次写像）

平面 P 上の点を平面 Q の上の点へ対応させる写像 A を考えます（図1）。

線形写像とは以下の性質を持ったものです：

1. 原点 $\vec{O}$ は原点 $\vec{O}$ へ対応させる、

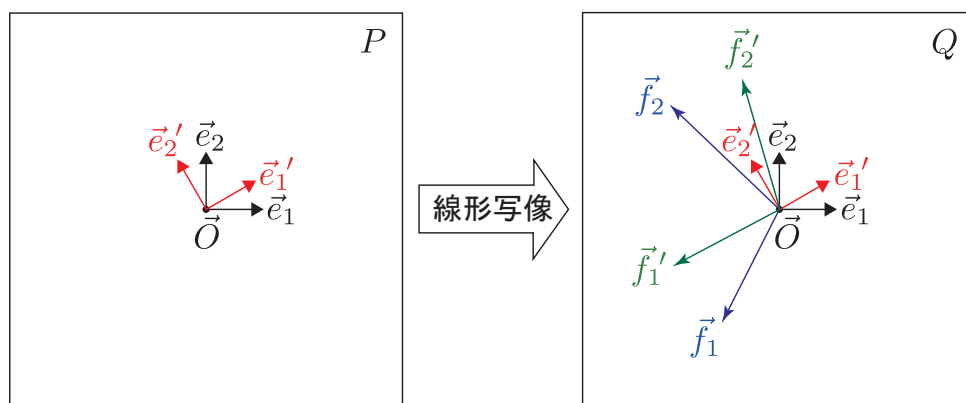


図 1: 線形写像 A によって、 $\vec{e}_1$ は $\vec{f}_1$ に、 $\vec{e}_2$ は $\vec{f}_2$ に、 $\vec{e}_1'$ は $\vec{f}_1'$ に、 $\vec{e}_2'$ は $\vec{f}_2'$ に写される。

2. **線形性**：写像 A によって、平面 P 上の点 $\vec{u}_1$ と $\vec{u}_2$ がそれぞれ平面 Q 上の点 $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ に写される、つまり

$$A: \vec{u}_1 \mapsto \vec{v}_1, \quad A: \vec{u}_2 \mapsto \vec{v}_2 \quad (8)$$

と写されるとき、任意の係数 c_1 と c_2 について、平面 P 上の点 $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$ は平面 Q 上の点 $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$ に写される、つまり

$$A: c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 \mapsto c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \quad (9)$$

と写される。式 (8) を

$$A(\vec{u}_1) = \vec{v}_1, \quad A(\vec{u}_2) = \vec{v}_2 \quad (10)$$

という記号で書き直すと、式 (9) は

$$A(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2) = c_1A(\vec{u}_1) + c_2A(\vec{u}_2) \quad (11)$$

と書き直せる。

(ii) 表現基底による線形写像の表現

線形写像は以下のようにして行列で表現することができます。まず、図 1 のように互いに直交する単位ベクトル $\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ を選びます。平面 P 上の点や平面 Q 上の点が

$$\vec{x} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \quad (12)$$

と書けるとき、この点を

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (13)$$

と「**表現**」することにします。つまり、単位ベクトル $\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ を使って、任意の点 $\vec{x}$ を 2×1 行列の形に表現したわけです。そこで、単位ベクトル $\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ を「**表現基底**」と呼びます。

特に、互いに直交する単位ベクトルを「**正規直交基底**」と呼びます。単位ベクトルそのものは

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

と表現されます。

次に、平面 P 上の単位ベクトル $\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ が線形写像 $\mathcal{A}$ によって、それぞれ平面 Q 上の

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1) = \vec{f}_1 = A_{11}\vec{e}_1 + A_{21}\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathcal{A}(\vec{e}_2) = \vec{f}_2 = A_{12}\vec{e}_1 + A_{22}\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} \quad (16)$$

に写されるとします。このとき線形性 (11) から、平面 P 上の任意の点 $\vec{x}$ は、平面 Q 上の

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{x}) &= \mathcal{A}(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \\ &= x\mathcal{A}(\vec{e}_1) + y\mathcal{A}(\vec{e}_2) \\ &= x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2 \end{aligned} \quad (17)$$

に写されます。このことからわかるように、平面 P 上の基底ベクトルが平面 Q 上のどの点に写されるかさえ指定すれば、平面 P 上の任意の点が平面 Q 上のどの点に写されるかが完全に判明します。そこで、平面 P 上の基底ベクトルが写される平面 Q 上の点 (15) と (16) を使って、線形写像 $\mathcal{A}$ を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (18)$$

と 2×2 行列に「表現」することにします。この4つの数字で線形写像 $\mathcal{A}$ に関する情報は尽くされているわけです。

実際に、

$$\text{点 } \vec{x} \longrightarrow \text{表現 } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\text{線形写像 } \mathcal{A} \longrightarrow \text{表現 } \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (20)$$

という表現が、行列の計算規則と全く矛盾ないものであることがわかります：

$$\text{写像 } \mathcal{A}(\vec{x}) = x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2 \longrightarrow \text{表現 } \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

(iii) 表現基底の変換

式 (15) と (16) を行列 A で表すと

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (22)$$

という形に書けます。これが、表現基底 $\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ 、線形写像 $\mathcal{A}$ 、その表現行列 A の間の関係です。

さて、表現基底を変更すると、線形写像 $\mathcal{A}$ の表現がどのように変更されるかを調べましょう。図 1 のように、別の表現基底 $\vec{e}_1'$ と $\vec{e}_2'$ を使いましょう。平面 P 上の新しい表現基底 $\vec{e}_1'$ と $\vec{e}_2'$ が線形写像 $\mathcal{A}$ で、それぞれ平面 Q 上の

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1') = \vec{f}_1', \quad \mathcal{A}(\vec{e}_2') = \vec{f}_2' \quad (23)$$

に写されるとします。これらのベクトルが

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_1' & \vec{f}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' \end{pmatrix} A' \quad (24)$$

という形に表される時、行列 A' が新しい表現基底 $\vec{e}_1'$ と $\vec{e}_2'$ による線形写像 $\mathcal{A}$ の表現です。この新しい表現行列 A' が元の表現行列 A とどのような関係にあるかを求めましょう。

そのために、新しい表現基底 $\vec{e}_1'$ と $\vec{e}_2'$ が、古い表現基底 $\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ を使って

$$\vec{e}_1' = U_{11}\vec{e}_1 + U_{21}\vec{e}_2, \quad (25)$$

$$\vec{e}_2' = U_{12}\vec{e}_1 + U_{22}\vec{e}_2 \quad (26)$$

と表されるとしましょう。これは

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \quad (27)$$

と書き直すことができます。ただし単位ベクトル $\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ が直交することと、単位ベクトル $\vec{e}_1'$ と $\vec{e}_2'$ が直交することを使うと、ここに現れた行列

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \quad (28)$$

は直交行列であることを証明できます。つまり $U^T U = I$ (I は単位行列) です。

さて、新しい表現基底 $\vec{e}_1'$ と $\vec{e}_2'$ を使った線形写像 $\mathcal{A}$ の表現 A' は、古い表現基底 $\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ を使った表現 A と

$$A' = U^T A U \quad (29)$$

という関係にあります。これは、まず U で新しい基底の表現から古い基底の表現に翻訳し、次に A で古い基底の表現で写像し、最後に U^T で古い基底の表現から新しい基底の表現に翻訳し戻しています。

それでは式 (29) を示してみましょう。まず、式 (27) の両辺に右から U^T をかけると、 $U^T U = U U^T = I$ であることから

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' \end{pmatrix} U^T = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} \quad (30)$$

が得られます。

次に、式 (25) と (26) を式 (23) に代入して線形性を使うと、

$$\vec{f}_1' = U_{11}\vec{f}_1 + U_{21}\vec{f}_2, \quad (31)$$

$$\vec{f}_2' = U_{12}\vec{f}_1 + U_{22}\vec{f}_2 \quad (32)$$

となります。これは、行列 (28) を用いて

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_1' & \vec{f}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \quad (33)$$

と書き直すことができます。式 (33) の両辺に右から U^T をかけると、 $U^T U = U U^T = I$ であることから

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_1' & \vec{f}_2' \end{pmatrix} U^T = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \end{pmatrix} \quad (34)$$

が得られます。式 (30) と (34) を式 (22) に代入すると

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_1' & \vec{f}_2' \end{pmatrix} U^T = \begin{pmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' \end{pmatrix} U^T A \quad (35)$$

となります。式 (35) の両辺に右から U とかけると、 $U^T U = U U^T = I$ であることから

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_1' & \vec{f}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' \end{pmatrix} U^T A U \quad (36)$$

となります。これが求めたかったものです。式 (36) を式 (24) と比較して、式 (29) が確認できました。

(iv) 固有ベクトルを表現基底にすると対角化できる

固有ベクトルとは、線形写像 $\mathcal{A}$ によって向きが変わらないベクトルのことです。つまり

$$\mathcal{A}(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \quad (37)$$

となるとき、比例係数 λ を固有値、ベクトル $\vec{u}$ を固有ベクトルと呼びます。平面上の線形変換では、固有ベクトルは 2 つ存在します：

$$\mathcal{A}(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1, \quad \mathcal{A}(\vec{u}_2) = \lambda_2 \vec{u}_2. \quad (38)$$

この 2 つの固有ベクトル $\vec{u}_1$ と $\vec{u}_2$ を新しい表現基底 $\vec{e}_1'$ と $\vec{e}_2'$ に選ぶと、つまり

$$\vec{e}_1' = \vec{u}_1, \quad \vec{e}_2' = \vec{u}_2 \quad (39)$$

とします。すると、式 (23) は

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1') = \vec{f}_1' = \lambda_1 \vec{e}_1', \quad \mathcal{A}(\vec{e}_2') = \vec{f}_2' = \lambda_2 \vec{e}_2' \quad (40)$$

と書き直されます。したがって式 (24) は

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_1' & \vec{f}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (41)$$

となります。つまり、固有ベクトルを新しい表現基底に選ぶと、そのときの線形写像 $\mathcal{A}$ の表現行列 A' は

$$A' = U^T A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (42)$$

のように対角化されることがわかります。

以上をまとめると、行列の対角化とは、固有ベクトルを表現基底とする表現行列を求める作業であることがわかります。

(v) 対称行列の固有ベクトルは互いに直交する単位ベクトルにできる

ところで、2つの固有ベクトル $\vec{u}_1$ と $\vec{u}_2$ を式 (39) のように新しい表現基底 $\vec{e}_1'$ と $\vec{e}_2'$ に選べるためには、2つの固有ベクトルが互いに直交している単位ベクトルでなければいけません。線形写像 $\mathcal{A}$ が対称である場合には、そのようにできることを示しましょう。

線形写像 $\mathcal{A}$ が対称であるということは、任意のベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ に対して

$$\vec{u} \cdot (\mathcal{A}(\vec{v})) = (\mathcal{A}(\vec{u})) \cdot \vec{v} \quad (43)$$

が成り立つことです。ここで、 $\vec{u}$ と $\vec{v}$ として特に表現基底 $\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ を選ぶと

$$\vec{e}_1 \cdot (\mathcal{A}(\vec{e}_2)) = (\mathcal{A}(\vec{e}_1)) \cdot \vec{e}_2 \quad (44)$$

です。式 (14)–(16) の表現を使うと

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

すなわち

$$A_{12} = A_{21} \quad (46)$$

となります。つまり、線形写像 $\mathcal{A}$ が対称であるということは表現行列 A が対称行列であることを意味します。

さて、式 (44) におけるベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ として、今度は対称な線形写像 $\mathcal{A}$ の固有ベクトル $\vec{u}_1$ と $\vec{u}_2$ を選ぶことにすると

$$\vec{u}_1 \cdot (\mathcal{A}(\vec{u}_2)) = (\mathcal{A}(\vec{u}_1)) \cdot \vec{u}_2 \quad (47)$$

です。式 (38) が成り立つので

$$\vec{u}_1 \cdot (\lambda_2 \vec{u}_2) = (\lambda_1 \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_2 \quad (48)$$

となります。固有値が縮退していなければ、つまり $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なら

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \quad (49)$$

でなければなりません。こうして、対称行列の固有ベクトルが互いに直交していることが示せました。

最後に、一般に

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 > 0, \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 > 0 \quad (50)$$

なので、それぞれの長さを 1 に調節できます。これを規格化と呼びます。こうして、対称行列の固有ベクトルを正規直交基底にすることができます。