振動波動論（月曜１限）：2013 **年** 10 **月** 28 **日分のまとめ**　　2013 年 11 月 5 日配布

担当：羽田野直道　`hatano@iis.u-tokyo.ac.jp`
`http://hatano-lab.iis.u-tokyo.ac.jp/hatano/index-j.html`

[I] ２自由度系の連成振動

２つのおもり（ともに質量 m）が３本のバネでつながれている場合を考えます。バネ（バネ定数 k_0）は左の壁とおもり 1 を、バネ（バネ定数 k_1）はおもり 1 とおもり２を、バネ（バネ定数 k_0）はおもり２と右の壁をつないでいるとします。バネが自然長のときにおもりは２つとも静止しているとします。この状態からの、おもり 1 の右へのずれを x_1、おもり２の右へのずれを x_2 と表します。以上の２つのおもりの運動方程式は

$$m\ddot{\vec{x}} = -K\vec{x} \tag{1}$$

とまとめて表すことができます。ただし

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$K = \begin{pmatrix} k_0 + k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

です。

対称行列 K は固有ベクトルを並べた直行行列 U によって

$$U^T K U = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

と対角化できます。ここで λ_1 と λ_2 は行列 K の固有値です。特に行列 (3) の場合、固有値と固有ベクトルは

$$\lambda_1 = k_0, \quad \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\lambda_2 = k_0 + 2k_1, \quad \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

となります。行列 K を対角化するための直交行列は

$$U = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

です。**直交行列を求めたら、必ず $U^T U = I$ になることを検算して下さい。**

そこで新しい変数 y_1 と y_2 を

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = U^T \vec{x} \tag{8}$$

と定義します。逆変換は

$$\vec{x} = U\vec{y} \tag{9}$$

です。式 (8) の変数変換は具体的には

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2) \end{cases} \tag{10}$$

です。この変数変換を使うと、式 (1) を

$$mU^T\ddot{\vec{x}} = -(U^TKU)(U^T\vec{x}) \tag{11}$$

と変形することにより、

$$m\ddot{\vec{y}} = -\Lambda\vec{y} \tag{12}$$

すなわち

$$m\ddot{y}_1 = -\lambda_1 y_1, \tag{13}$$

$$m\ddot{y}_2 = -\lambda_2 y_2 \tag{14}$$

となります。つまり 2 つの独立した調和振動子の形になります。

周波数を

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{m}} = \sqrt{\frac{k_0}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{m}} = \sqrt{\frac{k_0 + 2k_1}{m}} \tag{15}$$

と定義すれば、式 (12) の一般解は

$$y_1(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + B_1 e^{-i\omega_1 t} \tag{16}$$

$$y_2(t) = A_2 e^{i\omega_2 t} + B_2 e^{-i\omega_2 t} \tag{17}$$

となります。ここで A_1, B_1, A_2, B_2 が未定係数です。このように 2 自由度の場合、2 階微分方程式の一般解の未定係数の個数は 2 倍になります。一般に N 自由度の場合、2 階微分方程式の一般解の未定係数の個数は $2N$ です。ここで $\vec{x}(0)$ と $\dot{\vec{x}}(0)$ を初期条件として与えれば、それぞれのベクトルの成分を与えることになるので、初期条件は 4 個です。これから上の未定係数 4 個を決定できます。

上のように、バネ定数の行列を対角化して得られた $\vec{y}$ の各成分を基準振動と呼びます。元々のおもりの振動は互いに絡み合っていますが、対角化して基準振動で見ることによって、絡み合いがほどけ、独立した振動子の重ね合わせと見ることができるようになります。

[II] 実対称行列の対角化

何らかの行列 K に対して、ベクトル $\vec{u}$ と数 λ が

$$K\vec{u} = \lambda\vec{u} \tag{18}$$

を満たすとき、$\vec{u}$ を固有ベクトル、λ を固有値といいます。固有値は

$$\det(K - \lambda I) = 0 \tag{19}$$

という方程式を解いて得られます。ただし I は単位行列です。こうして得られた固有値 λ_i を使うと、固有ベクトルは

$$(K - \lambda_i)\vec{u}_i = \vec{0} \tag{20}$$

を解いて得られます。一般に、この式からは $\vec{u}$ の成分の比しか求まりません。そこで、長さが 1 になるように係数を決めます。これを「規格化」と呼びます。

行列 K が $N \times N$ の実対称行列のとき、一般に

1. 固有値は N 個存在し、全て実数、
2. 固有ベクトルは互いに直交する、

という性質が成り立ちます。この性質を使うと、実対称行列は以下の手順で対角化することができます。

1. 固有値と固有ベクトルを求める。
2. 全ての固有ベクトルを列に並べた行列 U をつくる。この行列は直交行列になっている。つまり $U^T = U^{-1}$ である。
3. 行列 $U^T KU$ を計算すると対角成分が固有値である対角行列が得られる：

$$U^T KU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{21}$$

この対角化を使うと K^n のような行列が

$$K^n = U \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & {\lambda_2}^n & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & {\lambda_3}^n & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} U^T \tag{22}$$

のように簡単に計算できます。

[III] ２自由度系の連成振動（続）

初期条件として

$$x_1(0) = X, \qquad \dot{x}_1(0) = 0, \tag{23}$$

$$x_2(0) = 0, \qquad \dot{x}_2(0) = 0 \tag{24}$$

を考えましょう。計算のコツは、常に y_1 と y_2 に直して計算することです。今の場合、$\vec{y}$ に対する初期条件の形に直すと、

$$y_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1(0) + x_2(0)\right) = \frac{X}{\sqrt{2}}, \tag{25}$$

$$y_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1(0) - x_2(0)\right) = \frac{X}{\sqrt{2}}, \tag{26}$$

$$\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0 \tag{27}$$

です。これを式 (16) と (17) に用いると

$$A_1 = B_1 = \frac{X}{2\sqrt{2}}, \qquad A_2 = B_2 = \frac{X}{2\sqrt{2}} \tag{28}$$

が得られます。したがって

$$y_1(t) = \frac{X}{\sqrt{2}}\cos(\omega_1 t), \qquad y_2(t) = \frac{X}{\sqrt{2}}\cos(\omega_2 t) \tag{29}$$

となります。最後に、$\vec{x}$ に戻すと

$$x_1(t) = \frac{X}{2}\left[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right] = X\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right), \tag{30}$$

$$x_2(t) = \frac{X}{2}\left[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)\right] = -X\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) \tag{31}$$

が得られます。

特に中央のバネが両端のバネに比べて弱い場合 $k_1 \ll k_0$ を考えます。新しい変数

$$\kappa = k_0 + k_1, \qquad \epsilon = \frac{k_1}{\kappa} = \frac{k_1}{k_0+k_1}, \qquad \Omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \tag{32}$$

を導入すると $\epsilon \ll 1$ です。このとき式 (15) は

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(k_0+k_1)-k_1}{m}} = \sqrt{\frac{\kappa-\epsilon\kappa}{m}} = \Omega\,(1-\epsilon)^{1/2} \simeq \Omega\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right), \tag{33}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{(k_0+k_1)+k_1}{m}} = \sqrt{\frac{\kappa+\epsilon\kappa}{m}} = \Omega\,(1+\epsilon)^{1/2} \simeq \Omega\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right) \tag{34}$$

とテーラー展開されます。したがって

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2} = \Omega, \qquad \frac{\omega_1-\omega_2}{2} = -\frac{\epsilon}{2}\Omega \tag{35}$$

となります。これらを式 (30) と (31) に代入すると

$$x_1(t) = X\cos(\Omega t)\cos\left(\frac{\epsilon}{2}\Omega t\right), \tag{36}$$

$$x_2(t) = X\sin(\Omega t)\sin\left(\frac{\epsilon}{2}\Omega t\right) \tag{37}$$

となり、連成振動のデモンストレーションが説明できます。