

[I] 強制振動

調和振動子に外力が加わった場合の運動方程式は非斉次 2 階線形微分方程式

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 a_0 \cos(\Omega t) \quad (1)$$

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 a_0 \sin(\Omega t) \quad (2)$$

の形に帰着します。両者を一度に扱うため、 $z = x + iy$ という変数に対する方程式

$$\ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 a_0 e^{i\Omega t} \quad (3)$$

を解きます。式 (3) の解を求めてから実部と虚部を取れば、それぞれ式 (1) と (2) の解が得られます。

非斉次方程式 (3) の一般解は、斉次方程式

$$\ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = 0 \quad (4)$$

の一般解と非斉次方程式 (3) の特解を加えた形に書けます。斉次方程式 (4) の一般解は

$$z_0(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \quad (5)$$

と書けます。次に非斉次方程式 (3) の特解を求めます。外力と同じ振動をすると予想して

$$z_1(t) = f(t)e^{i\Omega t} \quad (6)$$

と置いて、 $f(t)$ に対する微分方程式を求めます。結果は

$$\ddot{f} + 2i\Omega\dot{f} + (\omega_0^2 - \Omega^2)f = \omega_0^2 a_0 \quad (7)$$

となります。

[II] 非共鳴 $\omega_0 \neq \Omega$ の場合

まず $\omega_0 \neq \Omega$ の場合を考えます。式 (7) の最も簡単な形の特解は $\ddot{f} = \dot{f} = 0$ として、 f を定数とするものです。実際に、

$$f = a_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (8)$$

という解は式 (7) を満たします。したがって非斉次方程式 (3) の特解は

$$z_1(t) = a_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} e^{i\Omega t} \quad (9)$$

であり、一般解は式 (5) を加えて

$$z(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} + a_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} e^{i\Omega t} \quad (10)$$

となります。

初期条件 $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ を満たす解を求めましょう。まず式 (10) で $z(0) = 0$ とおくと

$$A + B + a_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} = 0 \quad (11)$$

が得られます。次に $\dot{z}(t)$ を計算して $\dot{z}(0) = 0$ とおくと

$$i\omega_0(A - B) + i\Omega a_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} = 0 \quad (12)$$

が得られます。式 (11) と (12) を連立して未定係数を求め、式 (10) に代入すると初期条件を満たす特解が

$$z(t) = -a_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} \left[\cos(\omega_0 t) + i \frac{\Omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right] + a_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} [\cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t)] \quad (13)$$

と得られます。実部と虚部を分けると

$$x(t) = a_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t)] \quad (14)$$

$$y(t) = a_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} \left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \right] \quad (15)$$

となります。いずれも、およそ振幅 $a_0 \omega_0^2 / (\omega_0^2 - \Omega^2)$ で振動することがわかります。

[III] 共鳴 $\omega_0 = \Omega$ の場合

次に $\omega_0 = \Omega$ の場合を考えます。式 (7) は

$$\ddot{f} + 2i\omega_0 \dot{f} = \omega_0^2 a_0 \quad (16)$$

となります。式 (7) の最も簡単な形の特解は $\ddot{f} = 0$ として、 f を t に比例するとするものです。実際に

$$f = \frac{\omega_0 a_0}{2i} t \quad (17)$$

という解は式 (16) を満たします。よって非斉次方程式 (3) の共鳴 $\omega_0 = \Omega$ の場合の特解は

$$z_1(t) = \frac{a_0 \omega_0}{2i} t e^{i\omega_0 t} \quad (18)$$

であり、一般解は式 (5) を加えて

$$z(t) = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t} + \frac{a_0 \omega_0}{2i} t e^{i\omega_0 t} \quad (19)$$

となります。

初期条件 $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ を満たす解を求めましょう。まず式 (19) で $z(0) = 0$ とおくと

$$A + B = 0 \quad (20)$$

が得られます。次に $\dot{z}(t)$ を計算して $\dot{z}(0) = 0$ とおくと

$$i\omega_0(A - B) + \frac{a_0\omega_0}{2i} = 0 \quad (21)$$

が得られます。式 (20) と (21) を連立して未定係数を求め、式 (19) に代入すると、初期条件を満たす特解が

$$z(t) = \frac{a_0}{4} 2i \sin(\omega_0 t) + \frac{a_0\omega_0}{2i} t [\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)] \quad (22)$$

と得られます。実部と虚部に分けると

$$x(t) = \frac{a_0}{2} \omega_0 t \sin(\omega_0 t) \quad (23)$$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} [\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t \cos(\omega_0 t)] \quad (24)$$

となります。いずれも、振幅が時間に比例して増大する項があります。

[IV] エネルギー収支

力学的エネルギーの時間変化は

$$\begin{aligned} \dot{E} &= m\dot{x} (\ddot{x} + \omega_0^2 x) \\ &= m\dot{x}\omega_0^2 a_0 \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (25)$$

となります。なお 2 つ目の等号では、運動方程式 (1) を使っています。

非共鳴 $\omega_0 \neq \Omega$ の場合、式 (14) を式 (25) に代入すると、 $\sin(\Omega t) \cos(\Omega t)$ や $\sin(\omega_0 t) \cos(\Omega t)$ の形の項が現れます。これらの項は正になったり負になったりし、時間平均するとゼロになります。

一方、共鳴 $\omega_0 = \Omega$ の場合、式 (23) を式 (25) に代入すると、 $t \cos^2(\omega_0 t)$ の形の項が現れます。これは正またはゼロであり、時間平均すると t に比例して増大します。つまり、固有周波数 ω_0 に合わせておもりを揺らすと、エネルギーが注入されて振幅が増大しますが、固有周波数に合っていないと、うまく揺らすことができないということがわかります。

[V] 共鳴の Q 値

バネ（固有振動数 ω_0 ）に外力（振幅 $\omega_0^2 a_0$ 、周波数 Ω ）と摩擦力 $-\gamma \dot{x}$ がある場合、長時間極限 $t \rightarrow \infty$ において、振幅は

$$\frac{\omega_0^2 a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}} \quad (26)$$

になり、振動の力学的エネルギーはその 2 乗

$$E(\Omega) = \frac{\omega_0^4 a_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2} \quad (27)$$

に比例します。関数 $E(\Omega)$ は $\Omega = \omega_0$ において最大値

$$E(\omega_0) = \frac{\omega_0^2 a_0^2}{4\gamma^2} \quad (28)$$

をとります。最大値をとる値の両側 γ だけずれたところでは、 $\omega_0 \gg \gamma$ のときに

$$E(\omega_0 \pm \gamma) \simeq \frac{\omega_0^2 a_0^2}{8\gamma^2} = \frac{1}{2}E(\omega_0) \quad (29)$$

つまり最大値のちょうど半分の値をとります。そこで 2γ を「半値幅」と呼びます。また最大値をとる値 ω_0 と半値幅 2γ の比

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} \quad (30)$$

を「共鳴の Q 値」と呼びます。これは共鳴ピークの鋭さを表すもので、摩擦力が小さくなると Q 値は大きくなり、共鳴のピークは鋭くなります。