振動波動論（月曜１限）：2013 **年** 10 **月** 15 **日分のまとめ**　　　2013 年 10 月 21 日配布
担当：羽田野直道　`hatano@iis.u-tokyo.ac.jp`
`http://hatano-lab.iis.u-tokyo.ac.jp/hatano/index-j.html`

[I] 摩擦力のある振動の過減衰

調和振動子に摩擦が加わった場合の運動方程式は２階斉次線形微分方程式

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + {\omega_0}^2 x(t) = 0 \tag{1}$$

の形に帰着します。特解として $x(t) = e^{i\omega t}$ の形を仮定して式 (1) に代入すると

$$\omega = i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + {\omega_0}^2} \tag{2}$$

が得られます。

過減衰 $\omega_0 < \gamma$ の場合、つまり摩擦が大きい場合、ほとんど振動できずに減衰することが予想されます。このとき、式 (2) の平方根の中は負なので

$$\omega = i\gamma \pm i\sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2} \tag{3}$$

と書き直します。したがって特解は

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{i\left(i\gamma \pm i\sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2}\right)t} \\ &= e^{-\gamma t} e^{\mp\sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2}\ t} \end{aligned} \tag{4}$$

となります。一般解はこの２つの特解を重ね合わせて

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{-\sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2}\ t} + Be^{+\sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2}\ t}\right) \tag{5}$$

となります。

初期条件として例えば $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0$ を課すと、未定係数が

$$A = -B = -\frac{v_0}{2\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}} \tag{6}$$

と決まります。したがって、上の初期条件を満たす特解は

$$x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}}\left[-e^{-\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2}\right)t} + e^{-\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + {\omega_0}^2}\right)t}\right] \tag{7}$$

となります。式 (7) において物理量の次元に矛盾がないことは、減衰振動の場合と同様にして確認できます。

式 (7) は２種類の減衰の重ね合わせです。次項で議論するように、特に第２項の減衰の方が長く残ります。

[II] 減衰の寿命

指数関数の減衰の寿命という概念について説明するために、原子核の分裂による、放射性原子の個数の減衰を考えましょう。放射性原子が N 個あったとき、単位時間あたりに

崩壊する原子数は、そのときに存在した原子数に比例します。そのため、放射性原子の個数の変化を表す微分方程式は

$$\dot{N} = -\gamma N \tag{8}$$

で与えられます。この微分方程式は斉次一階線形微分方程式なので、一般解は未定係数を1個だけ含みます。一般解は

$$N(t) = Ae^{-\gamma t} \tag{9}$$

であることが直ちにわかります。(直ちにわかるようになって下さい。) 初期条件を $N(0) = N_0$ とおくと未定係数が決まり、初期条件を満たす特解は

$$N(t) = N_0 e^{-\gamma t} \tag{10}$$

で与えられます。つまり、原子数は指数関数的に減少します。

半減期 $T_{1/2}$ とは、原子数が半数になるのにかかる時間です。つまり

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \tag{11}$$

です。式 (10) に代入すると

$$T_{1/2} = \gamma^{-1} \ln 2 \tag{12}$$

が導けます。物理では $\ln 2$ を省いて γ^{-1} をこの原子核の「寿命」と呼びます。同様に、一般に指数関数で減衰する物理量があれば、指数関数の肩の係数の逆数を、その物理量の「寿命」と呼びます。

過減衰の場合の解 (7) は、2つの指数関数の重ね合わせになっており、それぞれの寿命が

$$\frac{1}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2}}, \quad \frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2}} \tag{13}$$

です。第2項の方が寿命が長いので、式 (7) は基本的に第2項の寿命で減衰していく関数であると考えて良いことになります。

[III] 摩擦力のある振動の臨界減衰

臨界減衰 $\omega_0 = \gamma$ の場合、式 (2) が重根 $\omega = i\gamma$ になり、特解が一つ

$$e^{i\omega t} = e^{-\gamma t} \tag{14}$$

しか得られません。

もう一つの特解を求めるために、解を

$$x(t) = f(t)e^{-\gamma t} \tag{15}$$

の形におきます。これは、解がおよそ $e^{-\gamma t}$ の形で減衰すると考え、それ以外の部分 $f(t)$ を求めようとする手法です。もし $e^{-\gamma t}$ の形の減衰が間違っていたとしても、$f(t)$ の部分に $e^{\gamma t}$ が現れてキャンセルするはずなので、式 (15) の形においても一般性は失われません。

式 (15) を式 (1) の微分方程式に代入して $f(t)$ に関する微分方程式を導くと、結果は

$$\ddot{f}(t) = 0 \tag{16}$$

という非常に簡単な形になります。この微分方程式の一般解は

$$f(t) = At + B \tag{17}$$

です。式 (15) に代入すれば、$x(t)$ の一般解が

$$x(t) = Ate^{-\gamma t} + Be^{-\gamma t} \tag{18}$$

となります。別の言い方をすれば、特解が式 (14) 以外に $te^{-\gamma t}$ であるということです。

初期条件を $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0$ とおくと未定係数が決まり、初期条件を満たす特解は

$$x(t) = v_0 te^{-\gamma t} \tag{19}$$

であることが導かれます。次元をチェックしましょう。初期速度 v_0 の次元は $[\mathrm{LT}^{-1}]$ なので、$v_0 t$ の次元は [L] です。指数関数は無次元なので、[L] がそのまま右辺の次元であり、左辺の次元と矛盾しません。また γ の次元は前回の議論から $[\mathrm{T}^{-1}]$ だったので、指数関数の肩 γt は無次元であり、これも矛盾ありません。

[IV] 摩擦力のある振動のエネルギー収支

系の力学的エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m{\omega_0}^2 x^2 \tag{20}$$

なので、その時間変化は

$$\dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} + m{\omega_0}^2 x\dot{x} = m\dot{x}\left(\ddot{x} + {\omega_0}^2 x\right) = -2m\gamma\dot{x}^2 \tag{21}$$

となります。なお、最後の等号では微分方程式 (1) を用いました。式 (21) の右辺は負なので、力学的エネルギーが徐々に失われることがわかります。

これは摩擦力がする仕事に一致しています。おもりが Δx だけ移動したときに摩擦力 $-b\dot{x}$ がする仕事は $-b\dot{x}\Delta x$ です。これが時間 Δt の間に起こったとすると単位時間あたりの仕事率は

$$-\frac{b\dot{x}\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} -b\dot{x}^2 \tag{22}$$

です。もともと $\gamma = b/(2m)$ という定義だったので、式 (21) と式 (22) が一致していることがわかります。

つまり、摩擦のために熱が発生し、力学的エネルギーが徐々に熱エネルギーに変わっていくのです。このような現象を「エネルギー散逸」と言います。

[V] 強制振動

調和振動子に外力が加わった場合の運動方程式は非斉次２階線形微分方程式

$$\ddot{x}(t) + {\omega_0}^2 x(t) = {\omega_0}^2 a_0 \cos(\Omega t) \tag{23}$$
$$\ddot{y}(t) + {\omega_0}^2 y(t) = {\omega_0}^2 a_0 \sin(\Omega t) \tag{24}$$

の形に帰着します。両者を一度に扱うため、$z = x + iy$ という変数に対する方程式

$$\ddot{z}(t) + {\omega_0}^2 z(t) = {\omega_0}^2 a_0 e^{i\Omega t} \tag{25}$$

を解きます。式 (25) の解を求めてから実部と虚部を取れば、それぞれ式 (23) と (24) の解が得られます。

非斉次方程式 (25) の一般解は、斉次方程式

$$\ddot{z}(t) + {\omega_0}^2 z(t) = 0 \tag{26}$$

の一般解と非斉次方程式 (25) の特解を加えた形に書けます。理由は以下の通りです。斉次方程式の一般解を $z_0(t)$、非斉次方程式の特解を $z_1(t)$ とすると

$$\ddot{z}_0(t) + {\omega_0}^2 z_0(t) = 0 \tag{27}$$
$$\ddot{z}_1(t) + {\omega_0}^2 z_1(t) = {\omega_0}^2 a_0 e^{i\Omega t} \tag{28}$$

となります。辺々を加えると

$$\frac{d^2}{dt^2}(z_0(t) + z_1(t)) + {\omega_0}^2 (z_0(t) + z_1(t)) = {\omega_0}^2 a_0 e^{i\Omega t} \tag{29}$$

となり、$z_0(t) + z_1(t)$ が非斉次方程式 (25) の解であることがわかります。また、$z_0(t)$ は一般解なので未定係数２個を含んでいます。したがって $z_0(t) + z_1(t)$ も未定係数２個を含んでいます。つまり $z_0(t) + z_1(t)$ は未定係数２個を含んだ非斉次２階微分方程式の解なので、一般解です。