振動波動論（月曜１限）：2013 年 10 月 7 日分のまとめ　　　　2013 年 10 月 15 日配布

担当：羽田野直道　hatano@iis.u-tokyo.ac.jp

http://hatano-lab.iis.u-tokyo.ac.jp/hatano/index-j.html

[I] 摩擦力のある振動

調和振動子に摩擦が加わった場合の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv \tag{1}$$

は２階斉次線形常微分方程式

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + {\omega_0}^2 x(t) = 0 \tag{2}$$

の形に帰着させることができます。ただし

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \gamma = \frac{b}{2m} \tag{3}$$

です。

[II] 微分方程式の解

斉次線形常微分方程式には以下の性質があります。

重ね合わせの原理　斉次線形微分方程式に $x_1(t)$ と $x_2(t)$ の解があるとき、それらを重ね合わせた $Ax_1(t) + Bx_2(t)$ も解である。

未定係数の個数　n 階微分方程式の一般解には n 個の未定係数が含まれる。

初期条件　初期条件や境界条件などで n 個の条件を課すと、n 個の未定係数が決定され、物理的な特解が得られる。

これらの性質を使うと、式 (2) のような２階斉次線形常微分方程式では、

1. 何らかの手法で（時には目の子で）特解を２つ求める。
2. 特解を重ね合わせて、未定係数が２つある一般解を求める。
3. $t = 0$ での位置と速度の初期条件を課して、未定係数を決定する。

という手順で物理的な特解が得られます。

例えば式 (2) で<u>摩擦のない場合（$\gamma = 0$）</u>は、

$$e^{i\omega_0 t}, \quad e^{-i\omega_0 t} \tag{4}$$

は特解です。そこで

$$x(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \tag{5}$$

は一般解です。初期条件として、例えば $x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=v_0$ を課すと

$$A=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{v_0}{i\omega_0}\right),\qquad B=\frac{1}{2}\left(x_0-\frac{v_0}{i\omega_0}\right), \tag{6}$$

が得られ、物理的な特解は

$$x(t)=x_0\cos(\omega_0 t)+\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \tag{7}$$

となります。

[III] 次元チェック

力学に現れる物理量の次元は質量 M, 長さ L, 時間 T の組み合わせで表されます。最終的に得られた解の次元に矛盾がないことは必ずチェックしましょう。

チェックポイント１　等号の両辺の次元は同じでなければならない。足し算・引き算は同じ次元の量の間でしかできない。（このとき三角関数や指数関数は無次元であることに注意。）

チェックポイント２　三角関数や指数関数の引数は必ず無次元。

式 (7) で試してみましょう。$x(t)$ と x_0 の次元はともに [L]、cos の次元は [1] なので、右辺第１項に矛盾がありません。次に第２項の係数の次元を求めましょう。まず分子の v_0 は速度なので、その次元は

$$[v_0]=[\mathrm{LT}^{-1}] \tag{8}$$

です。また分母の ω_0 の次元を式 (3) から求めましょう。まず、バネ定数 k の次元は何でしょうか。式 (2) の左辺の次元は

$$[m\ddot{x}]=\left[\mathrm{MLT}^{-2}\right] \tag{9}$$

です。一方、右辺の次元は

$$[kx]=[k][\mathrm{L}] \tag{10}$$

です。このことからバネ定数 k の次元は

$$[k]=\left[\frac{\mathrm{MLT}^{-2}}{\mathrm{L}}\right]=\left[\mathrm{MT}^{-2}\right] \tag{11}$$

であることがわかります。したがって式 (3) から ω_0 の次元が

$$[\omega_0]=\left[\left(\frac{\mathrm{MT}^{-2}}{\mathrm{M}}\right)^{1/2}\right]=\left[\mathrm{T}^{-1}\right] \tag{12}$$

とわかります。したがって式 (7) の右辺第２項の係数の次元は

$$\left[\frac{v_0}{\omega_0}\right]=[\mathrm{L}] \tag{13}$$

となり、左辺と矛盾しません。同時に、三角関数の引数 $\omega_0 t$ が無次元であることが式 (12) から確認できます。以上から式 (7) は、次元に矛盾がないことがわかります。

[IV] 減衰振動

微分方程式 (2) の解き方は [II] と同じ手順です。特解として

$$x(t) = e^{i\omega t} \tag{14}$$

の形を仮定して式 (2) に代入すると

$$\left[(i\omega)^2 + 2\gamma(i\omega) + {\omega_0}^2\right] e^{i\omega t} = 0 \tag{15}$$

が得られます。したがって、

$$\omega^2 - 2i\gamma\omega - {\omega_0}^2 = 0 \tag{16}$$

を満たす ω を使うと、式 (14) が特解になることがわかります。式 (16) の解は

$$\omega = i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + {\omega_0}^2} \tag{17}$$

となります。（なお $\gamma = 0$ の場合は、式 (16) の解は $\omega = \pm\omega_0$ となり、式 (4) の特解に帰着します。）以下では３つの場合

1. 減衰振動の場合：$\omega_0 > \gamma$,
2. 臨界減衰の場合：$\omega_0 = \gamma$,
3. 過減衰の場合：$\omega_0 < \gamma$,

に分けて考えます。

減衰振動 $\omega_0 > \gamma$ の場合、つまり摩擦が小さい場合、振動しつつも、摩擦によって振幅が減衰することが予想されます。このとき、式 (17) の平方根の中は正なので、特解は

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{i(i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + {\omega_0}^2})t} \\ &= e^{-\gamma t} e^{\pm i\sqrt{-\gamma^2 + {\omega_0}^2}\ t} \end{aligned} \tag{18}$$

の２つとなります。右辺の $e^{-\gamma t}$ が減衰を表し、それ以外の部分が振動を表しています。一般解はこの特解２つを重ね合わせて

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{i\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}\ t} + Be^{-i\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}\ t}\right) \tag{19}$$

となります。

初期条件として例えば $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0$ を課すと、未定係数が

$$A = -B = \frac{v_0}{2i\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}} \tag{20}$$

と決まります。したがって、上の初期条件を満たす特解は

$$x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t} \sin\left(\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}\ t\right) \tag{21}$$

となります。これは、三角関数で振動しつつも、その振幅が減衰していく様子を表しています。

式 (21) において物理量の次元をチェックしましょう。式 (2) において、第 1 項の次元は

$$[\ddot{x}] = [\mathrm{LT}^{-2}] \tag{22}$$

なので、他の項の次元

$$[\gamma \dot{x}] = [\gamma][\mathrm{LT}^{-1}], \qquad [{\omega_0}^2 x] = [{\omega_0}^2][L] \tag{23}$$

も同じはずです。これから

$$[\gamma] = [\omega_0] = [\mathrm{T}^{-1}] \tag{24}$$

であることがわかります。そのため ${\omega_0}^2 - \gamma^2$ という引き算に矛盾がないことがわかります。また

$$[v_0] = [\mathrm{LT}^{-1}], \qquad [\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}] = [\mathrm{T}^{-1}] \tag{25}$$

なので、

$$\left[\frac{v_0}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}}\right] = \left[\frac{\mathrm{LT}^{-1}}{\mathrm{T}^{-1}}\right] = [\mathrm{L}] \tag{26}$$

となります。式 (21) の他の項は指数関数と三角関数なので無次元です。したがって、左辺の $[x] = [\mathrm{L}]$ と、右辺の係数の次元 (26) は矛盾ありません。

指数関数の肩が無次元になっていることは $[\gamma] = [\mathrm{T}^{-1}]$ であることから直ちにわかります。また、$[\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}] = [\mathrm{T}^{-1}]$ であることから、三角関数の引数も無次元であることがわかります。以上で、式 (21) において物理量の次元に矛盾がないことが確認できました。

[V] 補足：テーラー展開とオイラーの公式

関数 $f(x)$ が $x = 0$ において無限回微分可能だとすると、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{27}$$

という形にテーラー展開できます。これを用いると三角関数は

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{28}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{29}$$

と展開されます。一方、肩が複素数の指数関数は

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{30}$$

と展開されます。以上からオイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{31}$$

が確認できます。

さらに

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \tag{32}$$

を用いると、以下の２つの式を導けます：

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} e^{-ix}}{2i}. \tag{33}$$

第２式に分母の i を忘れがちなので注意！