振動波動論（月曜１限）：レポート問題I　　2013 年 10 月 21 日出題

担当：羽田野直道　hatano@iis.u-tokyo.ac.jp
http://hatano-lab.iis.u-tokyo.ac.jp/hatano/lecture/lecture-j.html

締め切り：11 月 5 日の講義開始時**厳守**。開始直後に解答を配布します。それ以降は受け付けません。電車が遅れた場合は、遅延証明書を併せて提出して下さい。

問題：摩擦のある振動子に強制振動の外力が働く場合を考えます。微分方程式は

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + {\omega_0}^2 z = {\omega_0}^2 a_0 e^{i\Omega t} \tag{1}$$

で与えられます。なお、$z = x + iy$ であり、$x(t)$ は外力が $\cos(\Omega t)$ に比例する場合の解、$y(t)$ は外力が $\sin(\Omega t)$ に比例する場合の解です。また、パラメータ ω_0, γ, Ω は全て正とします。以下では減衰振動 $\omega_0 > \gamma > 0$ の場合に限定して考えます。

式 (1) は非斉次２階線形微分方程式なので、その一般解は斉次方程式

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + {\omega_0}^2 z = 0 \tag{2}$$

の一般解に非斉次方程式 (1) の特解を加えたものです。斉次方程式 (2) の一般解は以前に講義で与えたので、それを用いて下さい。

(i) 非斉次方程式 (1) の特解を求めるために

$$z(t) = f(t) e^{i\Omega t} \tag{3}$$

とおいて、$f(t)$ に関する微分方程式を求めなさい。また、その微分方程式の最も簡単な解を求めなさい。以上を用いて、非斉次方程式 (1) の一般解を書き下しなさい。

(ii) 初期条件を $z(0) = 0,\ \dot{z}(0) = 0$ とします。未定係数を決定して初期条件を満たす特解を求め、その次元を議論しなさい。長時間極限 $t \to \infty$ で残る項を示し、そのときの $x(t) = \mathrm{Re}\, z(t)$ を求めなさい。

(iii) 力学的エネルギー

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m {\omega_0}^2 x^2 \tag{4}$$

の時間微分 $\dot{E}$ を γ や a_0 を用いて表しなさい。問 (ii) で求めた長時間極限の解 $x(t)$ を代入して $\dot{E}$ の時間平均を求め、その意味を議論しなさい。