振動波動論（月曜１限）：自習用フーリエ変換ドリル（連続関数編） 2014 年 1 月 20 日配布

担当：羽田野直道　hatano@iis.u-tokyo.ac.jp
http://hatano-lab.iis.u-tokyo.ac.jp/hatano/lecture/lecture-j.html

非周期関数のフーリエ変換

範囲 $-\infty < x < \infty$ で定義された関数 $f(x)$ のフーリエ変換と逆フーリエ変換は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \tag{1}$$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \tag{2}$$

です。（係数は教科書によって違いあり。）

問題１：ある関数 $f(x)$ のフーリエ変換

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \tag{3}$$

に対して以下を示しなさい。ただし $a > 0$、b は実数とします。

(i) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f(ax) e^{ibx}) e^{-ikx} dx = \frac{1}{a} g\left(\frac{k-b}{a}\right)$$

(ii) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x^n f(x)) e^{-ikx} dx = i^n \frac{d^n}{dk^n} g(k)$$

問題２：以下の関数について $g(k)$ を求めなさい。またそれが $f(x)$ を与えることを検算しなさい。

(i) $f(x) = e^{-ax^2}$（ただし $a > 0$）

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$

略解

問題１ (i) 変数変換

$$ax \to x, \qquad \frac{k-b}{a} \to k \tag{4}$$

によって式 (3) に帰着。

問題１ (ii) 式 (3) の両辺を k に関して n 階微分する。

問題２ (i) 積分は

$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-a\left(x - \frac{ik}{2a}\right) - \frac{k^2}{4a}\right] dx \end{aligned} \tag{5}$$

とまとめられます。ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{6}$$

を用いると、

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-k^2/(4a)} \tag{7}$$

です。検算は省略。

問題２ (ii) まず、

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{x}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{x}} dx \tag{8}$$

とします。次に変数変換 $y = \sqrt{x}$, $x = y^2$ によって

$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iky^2}}{y} 2y dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{iky^2}}{y} 2y dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-iky^2} dy + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{iky^2} dy \end{aligned} \tag{9}$$

とします。ガウス積分は、係数が純虚数の場合も使えるので

$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{ik}} + \sqrt{\frac{\pi}{-ik}}\right) = \sqrt{1}\left(e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}\right) \frac{1}{\sqrt{|k|}} \\ &= \sqrt{2} \cos\frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{|k|}} = \frac{1}{\sqrt{|k|}} \end{aligned} \tag{10}$$

となります。検算は省略。