振動波動論（月曜１限）：自習用フーリエ変換ドリル 2014 年 1 月 15 日出題

担当：羽田野直道　hatano@iis.u-tokyo.ac.jp
http://hatano-lab.iis.u-tokyo.ac.jp/hatano/lecture/lecture-j.html

周期関数のフーリエ変換

関数 $f(x)$ はとびとびの場所 $x = 0, \pm a, \pm 2a, \ldots$ でのみ値を持つ関数とします。さらに周期 L の周期関数とします：

$$f(x+L) = f(x). \tag{1}$$

また $L = Na$ とします。つまり周期 L が a によって N 分割されるとします。このとき、関数 $f(x)$ のフーリエ変換は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k g(k) e^{ikx} \tag{2}$$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x f(x) e^{-ikx} \tag{3}$$

です。なお、k に関する和と x に関する和はそれぞれ

$$k = 0, \frac{2\pi}{L}, \frac{4\pi}{L}, \ldots, \frac{2(N-1)\pi}{L}, \qquad x = 0, a, 2a, \ldots, (N-1)a \tag{4}$$

に関してとります。

問題：以下の関数について $g(k)$ を求めなさい。またそれが $f(x)$ を与えることを検算しなさい。なお、β と L は実数とし、$N = L/a$ は偶数とします。

(i) $f(x) = \cos(\beta x)$.

(ii) $f(x) = \sin(\beta x)$.

(iii) $$f(x) = f(x+L) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 1 & (0 < x < L/2) \\ 0 & (x = L/2) \\ -1 & (L/2 < x < L) \end{cases}$$

略解

(i) 周期が $L=2\pi/\beta$ の周期関数なので、

$$k=0,\beta,2\beta,\dots,(N-1)\beta \tag{5}$$

について $g(k)$ を求めます。まず $k=m\beta\neq\beta$ かつ、$k\neq(N-1)\beta$ のとき

$$\begin{aligned} g(m\beta) &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0,a,2a,\dots,(N-1)a}\cos(\beta x)e^{-im\beta x} = \frac{1}{2\sqrt{N}}\sum_{x=0,a,2a,\dots,(N-1)a}(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x})e^{-im\beta x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{N}}\left(\frac{1-e^{i(1-m)\beta Na}}{1-e^{i(1-m)\beta a}}+\frac{1-e^{i(-1-m)\beta Na}}{1-e^{i(-1-m)\beta a}}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

なお、２つの項で分母はゼロではありません。ここで $Na\beta=2\pi$ を使うと

$$e^{i(\pm1-m)\beta Na}=e^{i(\pm1-m)2\pi}=1 \tag{7}$$

となります。これより $k\neq\beta$ のとき $g(k)=0$ です。

次に $k=\beta$ のとき、式 (6) では第 1 項の分母がゼロになってしまうため、上の式変形が使えません。この場合は

$$g(\beta)=\frac{1}{2\sqrt{N}}\sum_{x=0,a,2a,\dots,(N-1)a}(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x})e^{-i\beta x}=\frac{1}{2\sqrt{N}}\left(N+\frac{1-e^{-2i\beta Na}}{1-e^{2i\beta a}}\right) \tag{8}$$

です。右辺第 2 項は式 (7) と同じ理由でゼロになるので、結局 $g(\beta)=\sqrt{N}/2$ です。

また $k=(N-1)\beta$ のとき、式 (6) で第 1 項の分母がゼロになってしまいます。なぜなら

$$e^{-i[-1-(N-1)]\beta a}=e^{iN\beta a}=e^{2\pi i}=1 \tag{9}$$

だからです。この場合、式 (8) と同様にして $g(\beta)=\sqrt{N}/2$ です。まとめると

$$g(m\beta)=\frac{\sqrt{N}}{2}(\delta_{m1}+\delta_{m(N-1)}),\quad m=0,1,2,\dots,N-1 \tag{10}$$

です。

逆に式 (10) を式 (2) に代入すると

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0,\beta,2\beta,\dots,(N-1)\beta}(\delta_{m1}+\delta_{m(N-1)})e^{ikx}=\frac{1}{2}\left(e^{i\beta x}+e^{i(N-1)\beta x}\right) \tag{11}$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}\right)=\cos(\beta x) \tag{12}$$

となり、元の $f(x)$ に戻ることが確認できます。なお、１行目から２行目の変形では $L=2\pi/\beta$ と、$x=0,a,2a,\dots$ において $e^{iN\beta x}=1$ であることを使っています。

(ii) 上と同様にして

$$g(m\beta)=\frac{\sqrt{N}}{2i}(\delta_{m1}-\delta_{m(N-1)}),\quad m=0,1,2,\dots,N-1 \tag{13}$$

です。

(iii) 周期が L の周期関数なので、

$$k = 0, \frac{2\pi}{L}, \frac{4\pi}{L}, \ldots, \frac{2(N-1)\pi}{L} \tag{14}$$

について $g(k)$ を求めます。

$$\begin{aligned} g(2m\pi/L) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0,a,2a,\ldots,(N-1)a} f(x) e^{2im\pi x/L} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=a,\cdots,(N/2-1)a} e^{2im\pi x/L} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=(N/2+1)a,\ldots,(N-1)a} e^{2im\pi x/L}. \end{aligned} \tag{15}$$

ここで $x = (N-n)a$ とすると

$$e^{2im\pi(N-n)a/L} = e^{2im\pi Na/L} e^{-2im\pi na/L} \tag{16}$$

となりますが、$e^{2im\pi Na/L} = e^{2im\pi} = 1$ なので、式 (15) の第 2 項は

$$\sum_{x=(N/2+1)a,\ldots,(N-1)a} e^{2im\pi x/L} = \sum_{x=-(N/2-1)a,\ldots,-a} e^{2im\pi x/L} = \sum_{x=a,\cdots,(N/2-1)a} e^{-2im\pi x/L} \tag{17}$$

となります。結局

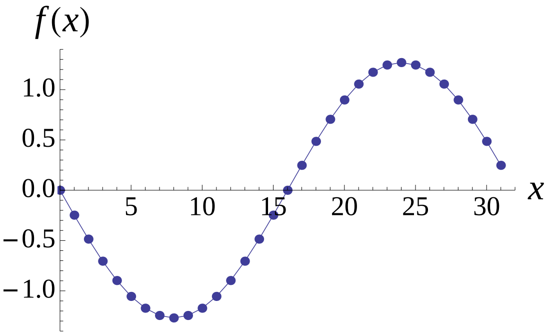
$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=a,\cdots,(N/2-1)a} \left(e^{ikx} - e^{-ikx} \right) \tag{18}$$

となります。これは $k \neq 0$ のときは

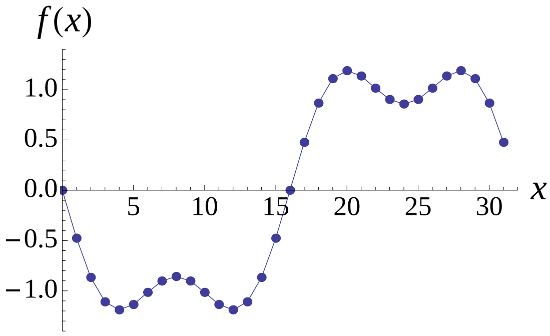
$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{e^{ika} - e^{iNka/2}}{1 - e^{ika}} - \frac{e^{-ika} - e^{-iNka/2}}{1 - e^{-ika}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{(e^{ika} - e^{iNka/2})(1 - e^{-ika}) - (e^{-ika} - e^{-iNka/2})(1 - e^{ika})}{(1 - e^{ika})(1 - e^{-ika})} \\ &= \frac{i}{\sqrt{N}} \frac{\sin(ka) - \sin(Nka/2) + \sin[(N/2-1)ka]}{1 - \cos(ka)} \end{aligned} \tag{19}$$

となります。また $k = 0$ のときは式 (18) から直接 $g(0) = 0$ です。逆変換の計算は省略します。

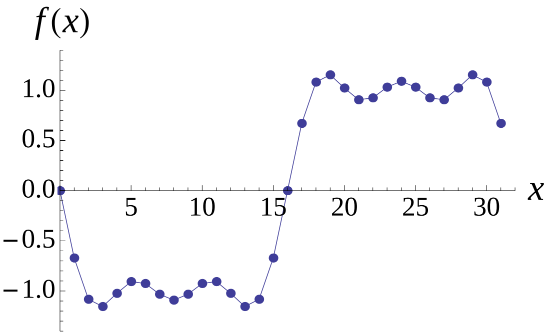
最後に、$f(x)$ が式 (18) の $g(k)$ からどのように再現されるかを図 1 に示します。式 (2) の和において k が小さい項のみを足すと、図 1(a) のように大まかな構造しか得られません。より大きい k の項を取り入れるたびに、$f(x)$ の形がより詳細に再現されていきます。



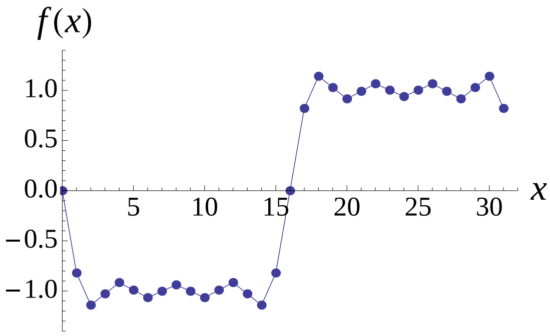
(a)



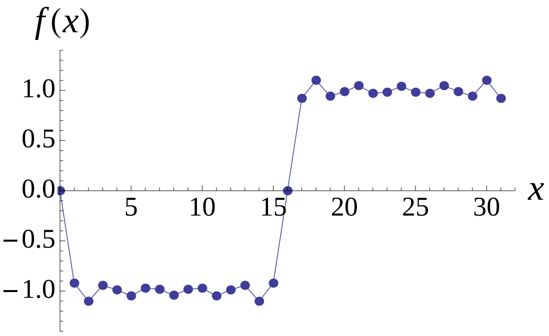
(b)



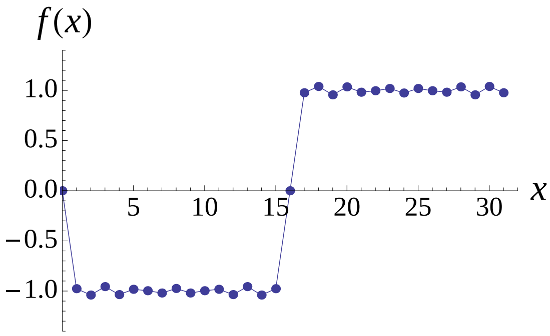
(c)



(d)



(e)



(f)

図 1: 式 (18) を式 (2) に代入して $f(x)$ をプロットしたもの。横軸は x で、$a = 1$, $L = Na = 32$ としました。本来は k に関して 32 個の項の和を取るところを、(a) では第 2 項まで、(b) では第 4 項まで、(c) では第 6 項まで、(d) では第 8 項まで、(e) では第 10 項まで、(f) では第 12 項までしか和を取っていません。