振動波動論 (月曜1限): 自習用対角化ドリル (エルミート行列編) 2013年12月2日出題 担当:羽田野直道 hatano@iis.u-tokyo.ac.jp

http://hatano-lab.iis.u-tokyo.ac.jp/hatano/lecture/lecture-j.html

対角化の手順:エルミート行列 A (エルミート共役行列がそれ自身に等しい $A^{\dagger}=A$) は以下の手順で対角化できます。

- 1. 永年方程式 $\det(A \lambda I) = 0$ を解いて、固有値 λ を求める。(ただし I は単位行列。)
- 2. それぞれの固有値 λ に対応する固有ベクトル \vec{u} を求め、それぞれ長さを $\vec{u}^\dagger \vec{u} = 1$ にする(規格化する)。
- 3. 各固有ベクトル \vec{u} を縦ベクトルにして各列に並べたユニタリー行列Uを構成する。
- 4. 検算のため、ユニタリー行列 U のエルミート共役行列 U^{\dagger} が、逆行列 U^{-1} になっていることを確認する。つまり $U^{\dagger}U=I$ を確認する。
- 5. 行列 $U^\dagger AU$ を計算する。これは、固有値 λ が対角要素に並んだ対角行列になるはず。

問題:上の手順に従って、以下の行列を対角化しなさい。

(i)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & 6 \end{pmatrix}$$

(ii)
$$\begin{pmatrix} -6 & -3i \\ 3i & 2 \end{pmatrix}$$

(iii)
$$\begin{pmatrix} 16 & 3 - 4i \\ 3 + 4i & -8 \end{pmatrix}$$

(iv)
$$\begin{pmatrix} -2 & 3 - 3i & 3 + 3i \\ 3 + 3i & 6 & i \\ 3 - 3i & -i & 6 \end{pmatrix}$$

(v)
$$\begin{pmatrix} -1 & -5i & 5i \\ 5i & 5 & 1 \\ -5i & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(vi)
$$\begin{pmatrix} 2 & i & 0 & -i \\ -i & 1 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & i \\ i & 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

略解:固有値と固有ベクトルは、それぞれ以下の通りです。固有ベクトルは、規格化して列に並べたユニタリー行列の形で示します。各列に適当な複素数をかけたものも正解です。固有値の順番と列の順番を同時に入れ替えたものも正解です。

(i) 固有値
$$7,1$$
 ユニタリー行列 $\left(\begin{array}{ccc} \frac{1+2i}{\sqrt{30}} & \frac{-(1+2i)}{\sqrt{6}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{array} \right)$

(ii) 固有値
$$3,-7$$
 ユニタリー行列 $\begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{10}} & \frac{3i}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

(iii) 固有値
$$17,-9$$
 ユニタリー行列 $\begin{pmatrix} \frac{3-4i}{\sqrt{26}} & \frac{3-4i}{5\sqrt{26}} \\ \frac{1}{\sqrt{26}} & -\frac{5}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$

(iv) 固有値
$$10,5,-5$$
 ユニタリー行列
$$\begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{2+2i}{\sqrt{10}} \\ \frac{2i}{\sqrt{10}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

(v) 固有値
$$9,6,-6$$
 ユニタリー行列
$$\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2i}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(vi) 固有値
$$3,2,0,-1$$
 ユニタリー行列
$$\begin{pmatrix} \frac{2i}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{i}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2i}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$