振動波動論（月曜１限）：自習用対角化ドリル（対称行列編） 2013 年 11 月 5 日出題

担当：羽田野直道 hatano@iis.u-tokyo.ac.jp
http://hatano-lab.iis.u-tokyo.ac.jp/hatano/lecture/lecture-j.html

対角化の手順：実対称行列 A は以下の手順で対角化できます。

1. 永年方程式 $\det(A-\lambda I)=0$ を解いて、固有値 λ を求める。（ただし I は単位行列。）
2. それぞれの固有値 λ に対応する固有ベクトル $\vec{u}$ を求め、それぞれ長さを 1 にする（規格化する）。
3. 各固有ベクトル $\vec{u}$ を縦ベクトルにして各列に並べた直交行列 U を構成する。
4. 検算のため、直交行列 U の転置行列 U^T が、逆行列 U^{-1} になっていることを確認する。つまり $U^TU=I$ を確認する。
5. 行列 U^TAU を計算する。これは、固有値 λ が対角要素に並んだ対角行列になるはず。

問題：上の手順に従って、以下の行列を対角化しなさい。

(i) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(ii) $$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(iii) $$\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -12 & -3 \end{pmatrix}$$

(iv) $$\begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 8 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

(v) $$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(vi) $$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

略解：固有値と固有ベクトルは、それぞれ以下の通りです。固有ベクトルは、規格化して列に並べた直交行列の形で示します。各列の符号を一斉に反転したものも正解です。固有値の順番と列の順番を同時に入れ替えたものも正解です。また、(v) においては固有値が縮退しているので、１番目と２番目の固有ベクトルは他の形もあり得ます。

(i) 固有値 $5, 0$ 直交行列 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

(ii) 固有値 $3, -7$ 直交行列 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

(iii) 固有値 $15, -11$ 直交行列 $\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

(iv) 固有値 $18, 9, -6$ 直交行列 $\begin{pmatrix} \frac{-4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(v) 固有値 $6, 6, -3$ 直交行列 $\begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$

(vi) 固有値 $5, 3, -3, -5$ 直交行列 $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$