振動波動論（月曜１限）：２０１３年度期末試験　　　　　　　　　　　担当：羽田野直道

第１問：図１のように、水平な床の上で質点（質量 m）がバネ（バネ定数 k）によって板に繋がれているとします。板は外から動かせるようになっており、板の位置を $x_0(t)$ とします。板が $x_0 = 0$ にあり、かつバネが自然長である場合の質点の位置を $x = 0$ とし、そこからの質点のずれを $x(t)$ と表すことにします。いずれも右向きを正とします。

板を $x_0 = a_0 \cos(\Omega t)$ のように動かす場合を考えます。質点には、バネの復元力の他に、速度に比例する摩擦力 $-b\dot{x}$ がかかるとします。なお、パラメータ m, k, a_0, Ω, b は全て正の実数とします。

(i) 質点 $x(t)$ の運動方程式を書き下しなさい。

以下では $2\gamma = b/m$, ${\omega_0}^2 = k/m$ として、m, k, b の代わりに γ と ω_0 を記号として使います。（記号 a_0 と Ω はそのまま使います。）また、$\omega_0 \gg \gamma$ とします。

(ii) 板が $y_0 = a_0 \sin(\Omega t)$ のように動く場合の運動を $y(t)$ とし、$x(t)$ と組み合わせて、$z(t) = x(t) + iy(t)$ に対する微分方程式を解くことにします。この微分方程式を書き下しなさい。

(iii) 上で求めた $z(t)$ に対する微分方程式の一般解を以下の手順で求めなさい：

1. 斉次方程式の一般解を求める。
2. 非斉次方程式の特解を求める。
3. 非斉次方程式の一般解を書き下す。

なお、(iii) においては $x(t)$ ではなく $z(t)$ の形のままで答えなさい。

(iv) 十分に時間がたった後（$t \gg \gamma^{-1}$）の振動 $x(t) = \mathrm{Re}\, z(t)$ を

$$x(t) = (\text{振幅}) \times \cos[(\text{周波数})t - \phi_0] \tag{1}$$

の形で求め、それを物理量の次元の観点から検算しなさい。また、振幅を最大にする Ω の条件を求め、なぜそのようになるのかを１～２行程度で説明しなさい。

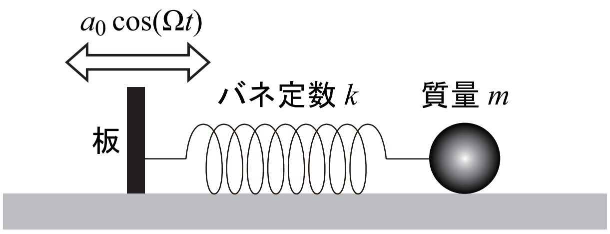

図 1: 質点がバネで板に繋がれている。

振動波動論（月曜１限）：２０１３年度期末試験

担当者 羽田野直道

実施日時 2014年2月7日（金）4限

試験時間 15:05–16:35（90分）

指定クラス １年生：理I（9, 13, 26, 27, 32, 36組）・文I・文II・文III
２年生：理I・理II・理III・文I・文II・文III

解答用紙 ３部配布（**１問につき１部使うこと**）

計算用紙 １枚配布

持ち込み なし

第１問

- 試験開始までこの面を上に向けておくこと。
- 解答用紙は、１問につき１部を使うこと。白紙の解答用紙も氏名と番号を記入して必ず提出すること。（提出しないと不正行為になります。）
- 解答は、最終的な答えだけでなく途中の説明も書くこと。
- 解答に当たって新しい記号を使っても良いが、必ず記号の定義がすぐにわかるように明確にしておくこと。
- 万が一、問題が間違っていて解けないことを発見したら、解けるように問題を改変してよい。ただし、どこが間違っていて、どのように改変したかを明示した上で解くこと。
- 解答例は以下のサイトに掲載します：

  `http://hatano-lab.iis.u-tokyo.ac.jp/hatano/lecture/lecture-j.html`

第２問：図２のように、３つの質点（いずれも質量 m）が４つのバネ（それぞれバネ定数 k_0, k_1, k_2, k_3）で繋がれているとします。質点が静止している状態で全てのバネが自然長であるとします。そこからの質点のずれを、左から i 番目のの質点に対して $x_i(t)$（$i = 1, 2, 3$）で表します。いずれも右向きを正とします。なお、摩擦力は無視します。

(i) ３つの質点の運動方程式を、ベクトル

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

と行列を使って $m\ddot{\vec{x}} = -K\vec{x}$ の形に書き下しなさい。

(ii) 図２の系でバネ定数が

$$k_0 = 2k_1 = 2k_2 = k_3 \tag{3}$$

という関係にあるとします。このとき、行列 K の固有値を k_0 で表し、行列 K を対角化する直交行列 U を求めなさい。なお、固有値を求めるに当たって行列式を計算する際には、必ず行列の基本変形を使って下さい。最初からサラスの公式（3×3 行列の行列式を求める公式）を使ってはいけません。

(iii) 図２の系の基準振動は $\vec{y}(t) = U^T\vec{x}(t)$ で与えられます。基準振動に対する運動方程式を $m\ddot{\vec{y}} = -\Lambda\vec{y}$ の形で表し、それを用いて基準振動の固有角周波数を $\omega_0 \equiv \sqrt{k_0/m}$ で表しなさい。また、それぞれの基準振動は、３つの質点がどのように運動したときに実現されるかを答えなさい。

(iv) 初期条件として

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ X \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

とします。このとき、基準振動それぞれの振幅を答えなさい。

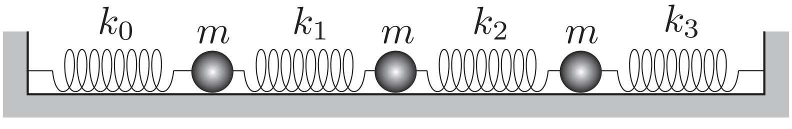

図 2: ３つの質点（同じ質量）が４つのバネ（異なるバネ定数）で繋がれている。

振動波動論（月曜１限）：２０１３年度期末試験

担当者 羽田野直道

実施日時 2014 年 2 月 7 日（金）4 限

試験時間 15:05–16:35（90 分）

指定クラス 1 年生：理 I（9, 13, 26, 27, 32, 36 組）・文 I・文 II・文 III
2 年生：理 I・理 II・理 III・文 I・文 II・文 III

解答用紙 3 部配布（**1 問につき 1 部使うこと**）

計算用紙 1 枚配布

持ち込み なし

第２問

- 試験開始までこの面を上に向けておくこと。
- 解答用紙は、1 問につき 1 部を使うこと。白紙の解答用紙も氏名と番号を記入して必ず提出すること。（提出しないと不正行為になります。）
- 解答は、最終的な答えだけでなく途中の説明も書くこと。
- 解答に当たって新しい記号を使っても良いが、必ず記号の定義がすぐにわかるように明確にしておくこと。
- 万が一、問題が間違っていて解けないことを発見したら、解けるように問題を改変してよい。ただし、どこが間違っていて、どのように改変したかを明示した上で解くこと。
- 解答例は以下のサイトに掲載します：

  http://hatano-lab.iis.u-tokyo.ac.jp/hatano/lecture/lecture-j.html

第３問

(i) 以下の積分を計算で示しなさい：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-k^2/(4a)}. \tag{5}$$

ただしガウス積分は $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ は与えられているとします。

(ii) x 軸上の離散的な点（間隔 a で $x_n = na = -\infty, \ldots, -2a, -a, 0, a, 2a, \ldots, \infty$）でのみ値を持つ関数 $f(x_n)$ のフーリエ変換は

$$f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/a}^{\pi/a} g(k) e^{ikx_n} dk \tag{6}$$

と書けます。一方、x 軸上の全ての x に対して値を持つ関数 $f(x)$ のフーリエ変換は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \tag{7}$$

と書けます。式 (6) の右辺が k の有限区間の積分であるのに対して、式 (7) の右辺が k の無限区間の積分になっている理由を、「短波長」「大きい波数」などのキーワードを用いて直観的に２～３行で説明しなさい。

(iii) 波 $f(x,t)$ の波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) \tag{8}$$

による運動を考えます。なお、v は正の実数とします。時刻 $t=0$ において

$$f(x,0) = e^{-ax^2 + ik_0 x} \tag{9}$$

の形の波が右向きに進んでいたとします。この波束の $t>0$ における運動 $f(x,t)$ を以下の手順で求めましょう。まず、フーリエ変換

$$f(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk, \qquad g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,0) e^{-ikx} dx \tag{10}$$

によって与えられる $g(k)$ を求めなさい。

(iv) フーリエ変換 (10) から、時刻 $t=0$ での波束 $f(x,0)$ は $f_k(x,0) = e^{ikx}$ の形の波を重み $g(k)$ で重ね合わせたものであることがわかります。次に、時刻 $t=0$ で $f_k(x,0) = e^{ikx}$ の形をしている個々の波が、$t>0$ でどのように運動するかを調べましょう。そこで

$$f_k(x,t) = e^{ikx} h_k(t) \tag{11}$$

の形を波動方程式 (8) に代入して、$t>0$ で右向きに進む波を表す解 $f_k(x,t)$ を求めなさい。その解が右向きに進む波を表す理由を２～３行で述べなさい。

(v) 初期条件 (9) に対する $t>0$ の解 $f(x,t)$ は、波 $f_k(x,t)$ を重み $g(k)$ で重ね合わせた形

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(k) f_k(x,t) dk \tag{12}$$

で与えられます。これを求めなさい。

振動波動論（月曜１限）：２０１３年度期末試験

担当者 羽田野直道

実施日時 2014 年 2 月 7 日（金）4 限

試験時間 15:05–16:35（90 分）

指定クラス １年生：理 I（9, 13, 26, 27, 32, 36 組）・文 I・文 II・文 III
２年生：理 I・理 II・理 III・文 I・文 II・文 III

解答用紙 ３部配布（**１問につき１部使うこと**）

計算用紙 １枚配布

持ち込み なし

第３問

- 試験開始までこの面を上に向けておくこと。
- 解答用紙は、１問につき１部を使うこと。白紙の解答用紙も氏名と番号を記入して必ず提出すること。（提出しないと不正行為になります。）
- 解答は、最終的な答えだけでなく途中の説明も書くこと。
- 解答に当たって新しい記号を使っても良いが、必ず記号の定義がすぐにわかるように明確にしておくこと。
- 万が一、問題が間違っていて解けないことを発見したら、解けるように問題を改変してよい。ただし、どこが間違っていて、どのように改変したかを明示した上で解くこと。
- 解答例は以下のサイトに掲載します：

`http://hatano-lab.iis.u-tokyo.ac.jp/hatano/lecture/lecture-j.html`