振動波動論（月曜１限）：期末試験解答例　　2014 年 2 月 7 日実施　　担当：羽田野直道

第１問（４点×９チェックポイント＝計３６点）
(i) 質点に働く力はバネの復元力と摩擦力です。バネの伸びが $x-x_0$ なので、バネの復元力は $-k(x-x_0)$ です。摩擦力は $-b\dot{x}$ なので、運動方程式は

$$m\ddot{x} = -k(x-x_0) - b\dot{x} \tag{A1}$$

つまり

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = ka_0\cos(\Omega t) \tag{A2}$$

となります**（４点）**。

(ii) 運動方程式 (A2) を記号 γ と ω_0 を使って書き直すと

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 a_0\cos(\Omega t) \tag{A3}$$

という微分方程式になります。一方で $y(t)$ に対する微分方程式は

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + {\omega_0}^2 y = {\omega_0}^2 a_0\sin(\Omega t) \tag{A4}$$

となるので、複素変数 $z(t) = x(t) + iy(t)$ に対する微分方程式

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + {\omega_0}^2 z = {\omega_0}^2 a_0 e^{i\Omega t} \tag{A5}$$

です**（４点）**。解 $z(t)$ の実部が $x(t)$ を与えます。

(iii) 式 (A5) は非斉次方程式なので、その一般解は斉次方程式

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + {\omega_0}^2 z = 0 \tag{A6}$$

の一般解と、非斉次方程式 (A5) の特解を足したものです。まず、斉次方程式 (A6) の一般解を求めます。これは２つの独立な特解を線形結合したものです。特解として

$$z(t) = e^{i\omega t} \tag{A7}$$

の形を仮定して ω を求めます。式 (A7) を式 (A6) に代入して $e^{i\omega t}$ を消去すると

$$-\omega^2 + 2i\gamma\omega + {\omega_0}^2 = 0 \tag{A8}$$

という２次方程式になります。その解は

$$\omega = i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + {\omega_0}^2} \tag{A9}$$

という２つです。ここで $\omega_0 \gg \gamma$ なので、平方根の中は必ず正です。以上から、特解として

$$z(t) = e^{-\gamma t} e^{\pm it\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}} \tag{A10}$$

という２つの解が見つかりました。したがって、斉次方程式 (A6) の一般解は、２つの特解 (A10) を線形結合して

$$z(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{it\sqrt{{\omega_0}^2-\gamma^2}} + Be^{-it\sqrt{{\omega_0}^2-\gamma^2}}\right) \tag{A11}$$

となります。ここで A と B が積分定数です**（４点）**。

次に非斉次方程式 (A5) の特解を求めます。特に

$$z(t) = f(t)e^{i\Omega t} \tag{A12}$$

の形を仮定して、$f(t)$ に対する微分方程式を求めます。式 (A12) を式 (A5) に代入して $e^{i\Omega t}$ を消去すると

$$\ddot{f} + 2(\gamma + i\Omega)\dot{f} + \left({\omega_0}^2 + 2i\gamma\Omega - \Omega^2\right) f = {\omega_0}^2 a_0 \tag{A13}$$

となります。特解なので、最も簡単な解として f が定数になる解を求めます。そのとき $\ddot{f} = \dot{f} = 0$ なので、求める特解は

$$f = \frac{{\omega_0}^2 a_0}{{\omega_0}^2 + 2i\gamma\Omega - \Omega^2} \tag{A14}$$

です。なお、分母は虚部が正なのでゼロにはなりません。（式 (A12) で最初から f を定数と仮定しても結構です。）以上から、非斉次方程式 (A5) の特解は

$$z(t) = \frac{{\omega_0}^2 a_0}{{\omega_0}^2 + 2i\gamma\Omega - \Omega^2} e^{i\Omega t} \tag{A15}$$

となります**（４点）**。

非斉次方程式 (A5) の一般解は、斉次方程式の一般解 (A11) と非斉次方程式の特解 (A15) を加えて

$$z(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{it\sqrt{{\omega_0}^2-\gamma^2}} + Be^{-it\sqrt{{\omega_0}^2-\gamma^2}}\right) + \frac{{\omega_0}^2 a_0}{{\omega_0}^2 + 2i\gamma\Omega - \Omega^2} e^{i\Omega t} \tag{A16}$$

です。この虚部が $y(t)$ の一般解を与えます**（４点）**。

(iv) 時間が十分に経って $t \gg \gamma^{-1}$ になると $e^{-\gamma t}$ がほとんどゼロに減衰するので、式 (A16) の右辺第１項は無視できるようになります。したがって右辺第２項だけが残り

$$\begin{aligned} z(t) &\simeq \frac{{\omega_0}^2 a_0}{{\omega_0}^2 + 2i\gamma\Omega - \Omega^2} e^{i\Omega t} && \text{(A17)} \\ &= \frac{{\omega_0}^2 a_0}{\left({\omega_0}^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \left({\omega_0}^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega\right) \left[\cos(\Omega t) + i\sin(\Omega t)\right] && \text{(A18)} \end{aligned}$$

となります**（４点）**。求めたい解 $x(t)$ はこの実部なので

$$x(t) \simeq \frac{{\omega_0}^2 a_0}{\left({\omega_0}^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \left[\left({\omega_0}^2 - \Omega^2\right)\cos(\Omega t) + 2\gamma\Omega\sin(\Omega t)\right] \tag{A19}$$

となります。**（係数の分母にも複素数があるのに、それを無視して実部を計算しないように注意して下さい。）**さらに、位相 ϕ_0 を

$$\cos\phi_0 = \frac{{\omega_0}^2 - \Omega^2}{\sqrt{\left({\omega_0}^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}, \qquad \sin\phi_0 = \frac{2\gamma\Omega}{\sqrt{\left({\omega_0}^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}, \tag{A20}$$

$$\tan\phi_0 = \frac{2\gamma\Omega}{{\omega_0}^2 - \Omega^2} \tag{A21}$$

と定義すると、式 (A19) は

$$x(t) = \frac{{\omega_0}^2 a_0}{\sqrt{\left({\omega_0}^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \cos(\Omega t - \phi_0) \tag{A22}$$

と書き直せます**（４点）**。

ここで式 (A19) の次元をチェックしましょう。式 (A3) から考えて

$$[\gamma] = [\omega_0] = [\Omega] = [\mathrm{T}^{-1}], \tag{A23}$$

$$[a_0] = [\mathrm{L}] \tag{A24}$$

となります。まず、三角関数の中身は $[\Omega t]$ が無次元なので矛盾ありません。三角関数そのものは無次元なので、式 (A19) の右辺の四角括弧の中の次元は $[\mathrm{T}^{-2}]$ です。右辺の前の係数の分母の次元は $[\mathrm{T}^{-4}]$、分子の次元は $[\mathrm{T}^{-2}\mathrm{L}]$ です。したがって係数の次元は $[\mathrm{T}^{2}\mathrm{L}]$ です。以上から、右辺の全体の次元は $[\mathrm{L}]$ です。これは左辺の次元と一致しているので矛盾ありません**（４点）**。

式 (A22) の振幅を最大化するためには、分母を Ω について最小化します。ここで $\omega_0 \gg \gamma$ なので、分母の第１項は分母の第２項に比べて非常に大きくなっています。したがって、分母の第１項をゼロにする条件 $\Omega = \omega_0$ のときに振幅は最大になります。振幅はおよそ、$\Omega = \omega_0$ を中心とし、幅が 2γ のローレンツ型をしています。

外力の振動が系の固有振動と同じ周波数の時に、最も効率よく外力が仕事をするため、振幅が大きくなります。これが共鳴です**（４点）**。

なお、振幅の Ω に関する最大値を正確に求めるには、分母を Ω について最小化します。平方根の中を Ω に関して微分してゼロとおくと

$$2({\omega_0}^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 8\gamma^2\Omega = 0 \tag{A25}$$

となり、これを解くと

$$\Omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\gamma^2} \tag{A26}$$

です。これでも正解とします。

第２問（４点×９チェックポイント＝計３６点）

(i) それぞれの質点には両側からバネの復元力が働きます。それを考慮すると、それぞれの質点の運動方程式は

$$m\ddot{x}_1 = -k_0 x_1 + k_1(x_2 - x_1) = -(k_0 + k_1)x_1 + k_1 x_2 \tag{A27}$$

$$m\ddot{x}_2 = -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) = k_1 x_1 - (k_1 + k_2)x_2 + k_2 x_3 \tag{A28}$$

$$m\ddot{x}_3 = -k_2(x_3 - x_2) - k_3 x_3 = k_2 x_2 - (k_2 + k_3)x_3 \tag{A29}$$

となります。これら３式を行列の形で表すと

$$m\ddot{\vec{x}} = -K\vec{x} \tag{A30}$$

と書けます。ここで

$$K = \begin{pmatrix} k_0 + k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \tag{A31}$$

です**（４点）**。

(ii) バネ定数が式 (3) の関係にあるとき、式 (A31) に

$$k_1 = k_2 = \frac{k_0}{2}, \qquad k_3 = k_0 \tag{A32}$$

を代入すると

$$K = \frac{k_0}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{A33}$$

となります。そこで、係数 $k_0/2$ を除いた行列を $\bar{K}$ とおいて、その固有値と固有ベクトルを求めましょう。永年方程式は

$$\det(\lambda I - \bar{K}) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = 0 \tag{A34}$$

となります。行列式を計算するために、行列の基本変形を行います。まず、第３行を第１行から引くと

$$\det\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & -(\lambda - 3) \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \tag{A35}$$

となり、さらに第１列を第３列に足すと

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} &= (\lambda - 3)\left[(\lambda - 2)(\lambda - 3) - 2\right] \\ &= (\lambda - 3)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda - 4) \end{aligned} \tag{A36}$$

となります**（４点）**。これから、永年方程式 (A34) の解は $\lambda = 1, 3, 4$ であることがわかります。行列 K の固有値は係数 $k_0/2$ をかけて

$$\frac{k_0}{2}, \frac{3k_0}{2}, 2k_0 \tag{A37}$$

です（4点）。

次に固有ベクトルを求めます。まず、行列 K の固有値 $k_0/2$ の固有ベクトルは、行列 $\bar{K}$ の固有値 $\lambda_1 = 1$ の固有ベクトルと同じなので、

$$(\lambda_1 I - \bar{K})\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = 0 \tag{A38}$$

を解きます。$2u_1 = v_1 = 2w_1$ であることがわかるので、規格化して

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A39}$$

が、行列 K の固有値 $k_0/2$ に対する固有ベクトルです。

次に行列 K の固有値 $3k_0/2$ の固有ベクトルは、行列 $\bar{K}$ の固有値 $\lambda_2 = 3$ の固有ベクトルと同じなので、

$$(\lambda_2 I - \bar{K})\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{A40}$$

を解きます。$v_2 = 0$ がわかり、それより $u_2 = -w_2$ であることがわかるので、規格化して

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{A41}$$

が、行列 K の固有値 $3k_0/2$ に対する固有ベクトルです。

最後に行列 K の固有値 $2k_0$ の固有ベクトルは、行列 $\bar{K}$ の固有値 $\lambda_3 = 4$ の固有ベクトルと同じなので、

$$(\lambda_3 I - \bar{K})\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{A42}$$

を解きます。$u_3 = -v_3 = w_3$ であることがわかるので、規格化して

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A43}$$

が、行列 K の固有値 $2k_0$ に対する固有ベクトルです。

以上から、行列 K を対角化する直交行列は、3つの固有ベクトルを並べて

$$U = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{A44}$$

となります（**4点**）。これが直交行列であることを検算しましょう。そのためには$U^{-1}=U^T$であることを利用して $U^TU=I$ を確認します。実際に

$$U^TU=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{A45}$$

を確認できます（**4点**）。また、対角化も

$$U^T\bar{K}U=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\\ 2 & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \tag{A46}$$

となり、確認できます。

(iii) もとの運動方程式 $m\ddot{\vec{x}}=-K\vec{x}$ に左から U^T をかけて変形すると

$$mU^T\ddot{\vec{x}}=-U^TKUU^T\vec{x} \tag{A47}$$

となります。ここで $\vec{y}=U^T\vec{x}$ であることと、行列 K が

$$\Lambda=U^TKU=\frac{k_0}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \tag{A48}$$

のように対角化されることを使うと、式 (A47) は

$$m\ddot{\vec{y}}=-\Lambda\vec{y} \tag{A49}$$

となります（**4点**）。

式 (A49) は、それぞれの基準振動の運動方程式

$$m\ddot{y}_1=-\frac{k_0}{2}y_1, \tag{A50}$$

$$m\ddot{y}_2=-\frac{3k_0}{2}y_2, \tag{A51}$$

$$m\ddot{y}_3=-2k_0y_3 \tag{A52}$$

を表しています。したがって、それぞれの固有角周波数は

$$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0, \qquad \omega_2=\sqrt{\frac{3}{2}}\omega_0, \qquad \omega_3=\sqrt{2}\omega_0 \tag{A53}$$

で与えられます（**4点**）。ここで $\omega_0=\sqrt{k_0/m}$ としました。

第１の基準振動による質点の動きは、$\vec{x}=U\vec{y}$ において他の基準振動をゼロとおく（$y_2=y_3=0$）とはっきりします。これは第１の基準振動の固有ベクトル $\vec{u}_1$（式 (A39)）に他な

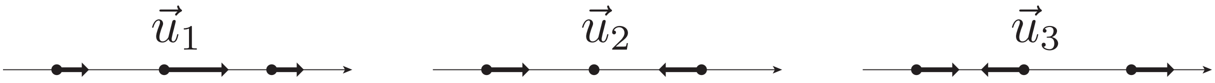

図 A1: 3つの基準振動における重りの動きの概観。

りません。つまり、全てが同位相で振動し、2番目の質点の振幅が左右の質点の振幅の2倍です。他の基準振動についても同様に考えると、それぞれ固有ベクトル $\vec{u}_2$ と $\vec{u}_3$ を考えればよいことがわかります。したがって、それぞれ図 A1 のような運動です**（4点）**。

(iv) $\vec{x}$ に対する初期条件を $\vec{y} = U^T\vec{x}$ の初期条件に翻訳すると

$$\vec{y}(0) = \frac{X}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{y}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A54}$$

となります。したがって基準振動 $\vec{u}_1$ の振幅が $\frac{2}{\sqrt{6}}X = \sqrt{\frac{2}{3}}X$、基準振動 $\vec{u}_3$ の振幅が $\frac{1}{\sqrt{3}}X$ です。基準振動 $\vec{u}_2$ は誘起されません**（4点）**。

第3問（4点×7チェックポイント＝計28点）
(i) 式 (5) の左辺の積分の指数部を平方完成してガウス積分の形にします。つまり左辺を

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-a\left(x - \frac{ik}{2a}\right)^2 - \frac{k^2}{4a}\right] dx \tag{A55}$$

と変形します。ここで $x - ik/(2a)$ を新たに x と変数変換すれば

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty-ik/(2a)}^{\infty-ik/(2a)} e^{-ax^2} dx \times e^{-k^2/(4a)} \tag{A56}$$

となります。積分は複素 x 平面上で実軸に平行な線上で行いますが、実は、このような場合でもガウス積分の公式は成立します。したがって、上の積分は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}x)^2}\frac{d(\sqrt{a}x)}{\sqrt{a}} \times e^{-k^2/(4a)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \times e^{-k^2/(4a)} \tag{A57}$$

となり、式 (5) の右辺に帰着します**（4点）**。

(ii) x 軸上で連続の値をとると、離散的な値をとる場合に比べて、関数が細かい構造を持てます。それを正弦波の重ね合わせで表現するためには、短い波長の波（波数の大きい波）が必要になります。そのため、大きい k まで積分する必要があります**（4点）**。

(iii) 式 (9) を式 (10) の第2式に代入すると

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+i(k_0-k)x} dx \tag{A58}$$

となります。式 (5) を用いると

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-(k-k_0)^2/(4a)} \tag{A59}$$

が得られます**（4点）**。

(iv) 式 (11) を波動方程式 (8) に代入すると

$$e^{ikx}\ddot{h}_k(t) = -v^2k^2e^{ikx}h_k(t) \tag{A60}$$

つまり

$$\ddot{h}_k = -(vk)^2 h_k \tag{A61}$$

となります。この一般解は

$$h_k(t) = Ae^{ivkt} + Be^{-ivkt} \tag{A62}$$

です**（4点）**。

初期条件から $h_k(0) = 1$ です。また、右向きに進む波であることから e^{-ivkt} のみを選びます。以上から

$$f_k(x,t) = e^{ikx-ivkt} = e^{ik(x-vt)} \tag{A63}$$

となります**（4点）**。この解は、時間が経過すると位相が減る形になっています。一方で、x が増加すると位相が増えることから、x が大きいほど、波としては遅れていることになります。このことから x が大きい方に向かって進む波であることがわかります**（4点）**。

(v) 式 (A59) と式 (A63) を式 (12) に代入すると

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-(k-k_0)^2/(4a)} e^{ik(x-vt)} dk \tag{A64}$$

となります。被積分関数の指数を k について平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{4a}\left[k-k_0-2ai(x-vt)\right]^2 + ik_0(x-vt) - a^2(x-vt)^2\right\} \\ &= \frac{e^{ik_0(x-vt)-a(x-vt)^2}}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[k-k_0-2ai(x-vt)]^2/(4a)} dk \end{aligned} \tag{A65}$$

となります。ガウス積分の公式を使うと

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \frac{e^{ik_0(x-vt)-a(x-vt)^2}}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[k/(2\sqrt{a})]^2} d[k/(2\sqrt{a})] \times 2\sqrt{a} \\ &= \frac{e^{ik_0(x-vt)-a(x-vt)^2}}{\sqrt{4\pi a}} \times \sqrt{\pi} \times 2\sqrt{a} \\ &= e^{ik_0(x-vt)-a(x-vt)^2} \end{aligned} \tag{A66}$$

となります**（4点）**。

式 (A66) は確かに $t = 0$ で式 (9) に帰着します。式 (9) は、中身が e^{ik_0x} で振動している波の振幅が e^{-ax^2} の形をしている波束を表しています。式 (A66) は、その波束が速度 v で右向きに進むことを表しています。