

解答例

(i) 非斉次方程式 (1) の一般解は、斉次方程式 (2) の一般解と非斉次方程式 (1) の特解を加えたものです。まず、斉次方程式 (2) の一般解は、講義で与えられたように減衰振動 $\omega_0 > \gamma$ の場合に

$$z(t) = e^{-\gamma t} \left(A e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + B e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} \right) \quad (5)$$

で与えられます。

次に、非斉次方程式 (1) の特解を求めるにあたり、式 (3) の形

$$z(t) = f(t) e^{i\Omega t} \quad (6)$$

を予想します。そこで、式 (6) を式 (1) に代入して $f(t)$ に関する微分方程式を求めます。式 (6) を時間で微分すると

$$\dot{z} = \dot{f} e^{i\Omega t} + f(i\Omega) e^{i\Omega t} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= \left[\ddot{f} e^{i\Omega t} + \dot{f}(i\Omega) e^{i\Omega t} \right] + \left[\dot{f}(i\Omega) e^{i\Omega t} + f(i\Omega)^2 e^{i\Omega t} \right] \\ &= \ddot{f} e^{i\Omega t} + 2i\Omega \dot{f} e^{i\Omega t} - \Omega^2 f e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (8)$$

となります。これを式 (1) に代入して $e^{i\Omega t}$ を約すると、 $f(t)$ に関する微分方程式が

$$\ddot{f} + 2(\gamma + i\Omega) \dot{f} + (\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega) f = \omega_0^2 a_0 \quad (9)$$

となります。特解を求めれば良いので、最も簡単な形として $\ddot{f} = \dot{f} = 0$ となる解を考え

$$f(t) = \frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \quad (10)$$

という定数解が得られます。確かに式 (10) は式 (9) を満たしています。なお、式 (10) の分母の虚部は正なので、 $\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega = 0$ の場合を考える必要はありません。

以上から、非斉次方程式 (1) の特解は

$$z(t) = \frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} e^{i\Omega t} \quad (11)$$

であり、したがって、非斉次方程式 (1) の一般解は式 (5) を加えて

$$z(t) = e^{-\gamma t} \left(A e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + B e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} \right) + \frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} e^{i\Omega t} \quad (12)$$

となります。

(ii) 一般解 (12) において初期条件を $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$ とおいて、初期条件を満たす特解を求めます。まず $z(0) = 0$ から

$$A + B + \frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} = 0 \quad (13)$$

すなわち

$$A + B = -\frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \quad (14)$$

となります。

次に、式 (12) の時間微分が

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & -\gamma e^{-\gamma t} \left(A e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + B e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} \right) \\ & + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} e^{-\gamma t} \left(A e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} - B e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} \right) \\ & + i\Omega \frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (15)$$

であることから、 $\dot{z}(0) = 0$ に対しては

$$-\gamma(A + B) + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(A - B) + i\Omega \frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} = 0 \quad (16)$$

となります。式 (14) を使って簡単にすると

$$\begin{aligned} A - B = & \frac{1}{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \left[\gamma \left(-\frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \right) - i\Omega \frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \right] \\ = & -\frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \frac{\gamma + i\Omega}{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \end{aligned} \quad (17)$$

となります。

式 (14) と式 (17) を連立すると、未定係数が

$$A = -\frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma + i\Omega}{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \right) \quad (18)$$

$$B = -\frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\gamma + i\Omega}{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \right) \quad (19)$$

と求められます。これらを一般解 (12) に代入すると、初期条件を満たす特解が

$$\begin{aligned} z(t) = & -e^{-\gamma t} \frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma + i\Omega}{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \right) e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\gamma + i\Omega}{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \right) e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} \right] \\ & + \frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} e^{i\Omega t} \\ = & \frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \left[e^{i\Omega t} - e^{-\gamma t} \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \right) \right. \\ & \left. - e^{-\gamma t} \frac{\gamma + i\Omega}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \right) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

と得られます。

式 (20) の次元をチェックしましょう。非斉次方程式 (1) から

$$[\gamma] = [\omega_0] = [\Omega] = [T^{-1}] \quad (21)$$

$$[a_0] = [L] \quad (22)$$

であることがわかります。したがって

$$[\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}] = [T^{-1}] \quad (23)$$

であり、式 (20) の指数関数の肩 γt , Ωt や三角関数の引数 $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t$ は全て無次元であることがわかり、矛盾がありません。次に

$$\left[\frac{\gamma + i\Omega}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \right] = \left[\frac{T^{-1}}{T^{-1}} \right] = [1] \quad (24)$$

ですから、式 (20) の四角括弧の中身の 3 項は全て無次元であり、加減しても矛盾ありません。最後に

$$\left[\frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \right] = \left[\frac{T^{-2}L}{T^{-2}} \right] = [L] \quad (25)$$

なので、式 (20) の右辺全体は $[L]$ の次元であり、左辺の次元と矛盾しません。

さて、長時間極限 $t \rightarrow \infty$ では、式 (20) の中で $e^{-\gamma t}$ がかかっている項が無視できるので、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{\omega_0^2 a_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} e^{i\Omega t} \quad (26)$$

となります。これを実部と虚部に分けると

$$\frac{\omega_0^2 a_0 (\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2} [\cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t)] \quad (27)$$

なので、長時間極限では

$$x(t) = \text{Re } z(t) = \frac{\omega_0^2 a_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2} [(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t) + 2\gamma\Omega \sin(\Omega t)] \quad (28)$$

$$= \frac{\omega_0^2 a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t + \phi_0) \quad (29)$$

となります。ただし、最後の式では

$$\tan \phi_0 = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\gamma\Omega} \quad (30)$$

と置いて、三角関数を合成しました。以上のことから、共鳴 $\omega_0 = \Omega$ の場合に振幅が最大になることがわかります。その時の解は

$$x(t) = a_0 \frac{\omega_0^2}{2\gamma\Omega} \sin(\Omega t) \quad (31)$$

です。

(iii) エネルギー収支を議論します。力学的エネルギー (4) の時間微分は

$$\begin{aligned}\dot{E} &= m\dot{x}\ddot{x} + m\omega_0^2 x\dot{x} \\ &= m\dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x)\end{aligned}\tag{32}$$

$$= m\dot{x}[-2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 a_0 \cos(\Omega t)]\tag{33}$$

$$= -2m\gamma\dot{x}^2 + m\omega_0^2 a_0 \dot{x} \cos(\Omega t)\tag{34}$$

となります。ここで、式 (32) から式 (33) の変形では元の微分方程式 (1) を用いました。

式 (34) の右辺の第 1 項は必ず負なので、この項は摩擦熱によるエネルギー散逸を表します。次に、第 2 項における $\dot{x}$ には、式 (28) から $\sin(\Omega t)$ と $\cos(\Omega t)$ の項があります。このうちで $\sin(\Omega t)$ の項を代入すると $\sin(\Omega t) \cos(\Omega t)$ の形になり、時間平均するとゼロになります。一方、 $\cos(\Omega t)$ の項を代入すると $\cos^2(\Omega t)$ となり、時間平均すると $1/2$ になります。つまり第 2 項を時間平均すると、係数まで考えて正の値です。これは外力がする仕事です。

エネルギーの時間微分を具体的に計算してみます。長時間極限の解 (29) を使うと

$$\dot{x}(t) = \frac{\omega_0^2 a_0 \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t + \phi_0)\tag{35}$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{\omega_0^2 a_0 \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t + \phi_0)\tag{36}$$

となります。式 (36) と式 (29) を使うと、式 (32) において

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\omega_0^2 a_0 (\omega_0^2 - \Omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t + \phi_0)\tag{37}$$

となります。したがって、

$$\begin{aligned}\dot{E} &= m \frac{\omega_0^2 a_0 \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t + \phi_0) \\ &\quad \times \frac{\omega_0^2 a_0 (\omega_0^2 - \Omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t + \phi_0) \\ &= \frac{\omega_0^4 a_0^2 \Omega (\omega_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2} \times \frac{m}{2} \sin(2\Omega t + 2\phi_0)\end{aligned}\tag{38}$$

となります。これは時間平均するとゼロになります。 $(\omega_0 = \Omega$ の場合には、恒等的にゼロになります。) つまり、外力がする仕事と、摩擦で散逸するエネルギーがちょうど釣り合つて、平均するとゼロになっています。

式 (38) の次元をチェックしておきましょう。まず、三角関数の中身は無次元で矛盾ありません。係数の分母の各項は

$$[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2] = [4\gamma^2 \Omega^2] = [\text{T}^{-4}]\tag{39}$$

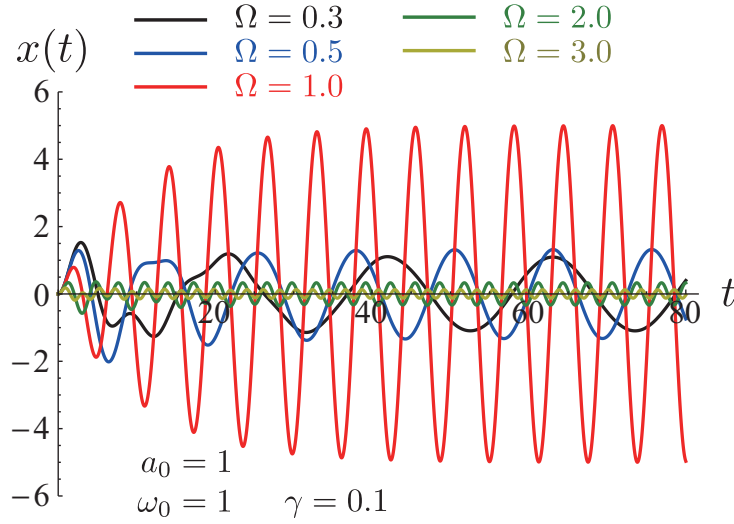


図 1: 初期条件を満たす特解 (20) の実部の時間変化の様子。なお、 $a_0 = 1$, $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.1$ に固定しています。

です。一方、分子は

$$[\omega_0^4 a_0^2 \Omega (\omega_0^2 - \Omega^2)] = [\text{L}^2 \text{T}^{-7}] \quad (40)$$

です。したがって、係数部分は

$$\left[\frac{\omega_0^4 a_0^2 \Omega (\omega_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2} \right] = [\text{L}^2 \text{T}^{-3}] \quad (41)$$

です。最後に $m/2$ の部分を併せて考慮すると、式 (38) の右辺の次元は $[\text{ML}^2 \text{T}^{-3}]$ ですが、一方でエネルギーの次元は

$$[E] = \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 \right] = [\text{ML}^2 \text{T}^{-2}] \quad (42)$$

です。したがって、式 (38) の右辺の次元はエネルギーを時間で割ったものと同じ次元です。確かに式 (38) の左辺 $\dot{E}$ と同じ次元です、矛盾ありません。

参考資料：図 1 に、式 (20) の実部の時間変化の様子を示します。外力の周波数 Ω が ω_0 に一致するときに振幅が大きくなること、ただし、摩擦力があるために長時間極限で振幅が一定値に落ち着くことがわかります。

図 2 に、長時間極限での振舞 (29) の振幅とその 2 乗を示します。共鳴条件 $\Omega = \omega_0$ で高いピークになっていることがわかります。図 2(b) の線の作図から、ピークの半値幅はおよそ $2\gamma = 0.2$ になっていることがわかります。したがって、Q 値は

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = 5 \quad (43)$$

で与えられます。

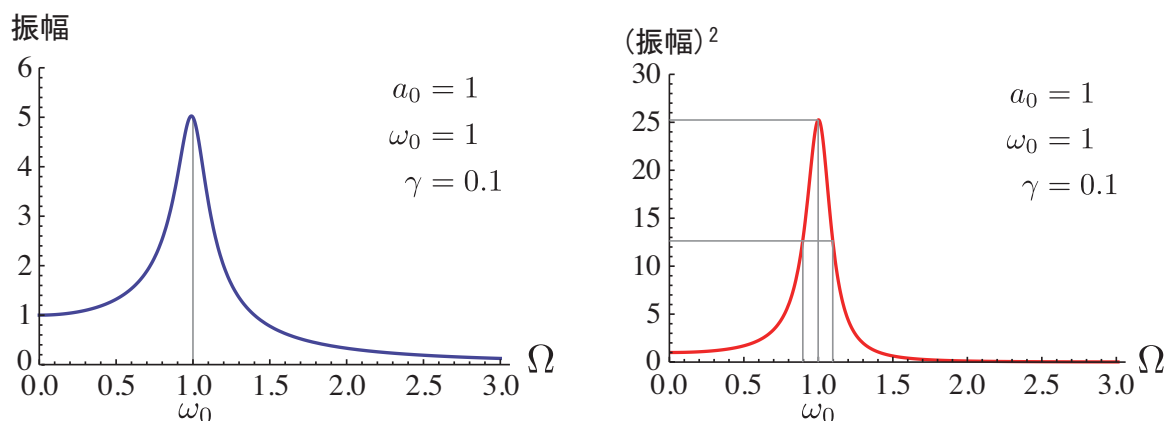


図 2: 長時間極限での振舞 (29) の (a) 振幅と (b) その 2 乗。 (b) においては、ピーク位置、ピークの高さ、ピークの高さの半分、および半値幅を灰色線で示してあります。なお、 $a_0 = 1$, $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.1$ に固定しています。

配点：言葉による説明が不足している場合は、程度によって減点 1 ～ 2 点します。

- 式 (9) で 1 点
- 式 (10) で 1 点
- 式 (12) で 1 点
- 式 (17) で 1 点
- 式 (18)–(19) で 1 点
- 式 (20) で 1 点
- 式 (20) の係数の次元の議論で 1 点
- 式 (20) の引数の無次元の議論で 1 点
- 式 (26) で 1 点
- 式 (28) (または式 (29)) で 1 点
- 式 (33) (または式 (34)) で 1 点
- 式 (38) で 1 点
- エネルギー収支の議論「外力がする仕事と、摩擦で散逸するエネルギーがちょうど釣り合って、平均するとゼロ」で 1 点
- 式 (38) の次元の議論で 1 点。これは問題に指定していませんが、必ず行うべき事です。

注意：計算は途中経過も書きましょう。利点は以下の 2 つです：

- 書いている内に計算ミスに気付くことがあります。
- 採点者が部分点を与えやすくなります。