

企業の所得分布のジップ則

河村健士
羽田野研究室

2001年2月28日

概要

世の中にはジップの法則と言われる法則に従う様々な現象が発見されている。しかし、これは経験則であり、実際にシミュレーションで再現した例はあまりない。そこで、本研究では企業間取り引きの階層構造に注目し、できるだけ簡単なモデルをたてて企業の所得分布のシミュレーションを行った。このモデルにより、企業の所得分布のジップ則が再現できた。

目次

1	はじめに	3
2	企業の所得分布のジップ則とは	3
3	モデルの説明	6
4	モデルの結果	8
5	まとめ	17
A	企業の所得分布シミュレーションのプログラムリスト	19

1 はじめに

フラクタル分布とは、ある量 s の確率分布 $P(s)$ が、

$$P(s) \propto s^{-\alpha} \quad (1)$$

のように、べき乗の形をとる分布である。フラクタル分布において、注目すべき点は、特徴的な値がないというスケール不変性である。つまり、任意の係数 α に対して、

$$P(\alpha s) \propto P(s) \quad (2)$$

となる。このような分布関数があるためには、その背景にある物理現象が特徴的なスケールを持たないという著しい性質がなくてはならない [1]。

フラクタル分布の中でも特に、べき指数が -1 のものをジップの法則という。つまり分布が双曲線状に並ぶような法則である (図 1)。この法則はジップが 1949 年に、英単語の出現確率と順位の積が一定になることから発見した。このほかにも、日本の都市人口の順位と人口、企業の所得とその所得以上の所得を持つ企業の数 (図 2) など、さまざまなことでジップの法則が発見されている。

フラクタル分布は平均値を持たず、ガウス分布のようなピークがあらわれないために、分布がべき乗にしたがうものであるが、ジップの法則は其中でも傾きが -1 になるという、特殊なものである。このようなジップの法則を再現したモデルは今まであまりない。

そこで本研究では企業の所得分布について、なるべく簡単なモデルで再現できないかと考え、モデルをたててシミュレーションを行った。その結果、図 2 のような所得分布が再現できた。

2 企業の所得分布のジップ則とは

所得が 4000 万円以上の日本の企業で、横軸に企業の所得、縦軸にその所得以上の所得を持つ企業の数をとると、両対数プロットしたときに傾きが -1 の直線になる、つまりジップの法則に従う (図 2)。

具体的には、所得 s より大きな所得を持つ企業の数 N と、 s の関係は

$$N(> s) \propto s^{-1} \quad (3)$$

という形になる [3]。なお、ここでいう所得とは (入ってきた金の総額) - (出ていった金の総額) のことである。企業の所得がべき乗分布になるといことは、企業間の取り引きにおいて特徴的な所得額がないという著しい性質を示している。

先ほど述べたように、ジップの法則はこれまであまり再現されていない。そこで、図 2 のような分布を再現しようと考えた。

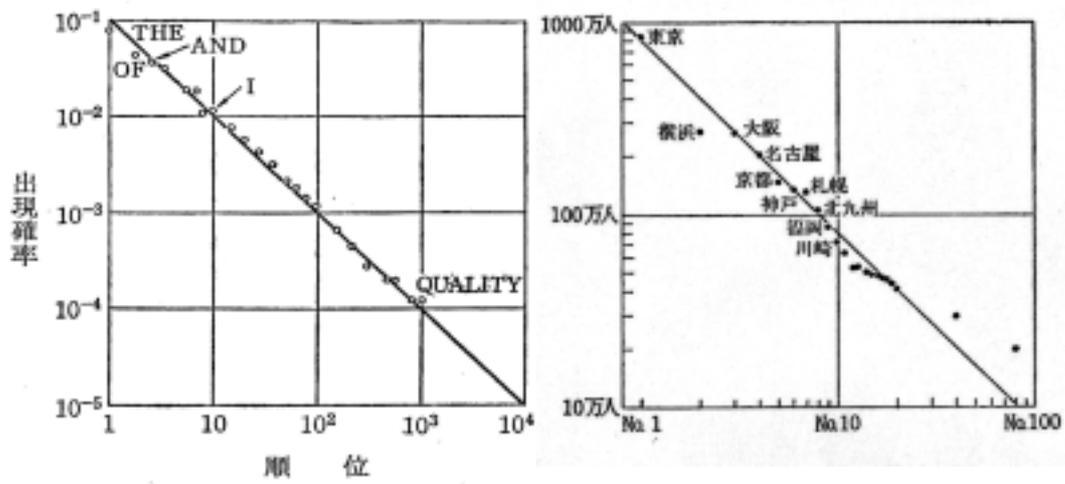


図 1: 左：英単語の出現確率と順位（横軸：英単語の出現順位 縦軸：出現確率）。
 右：日本の都市人口の順位と人口（横軸：都市人口の順位 縦軸：人口）。いずれも両対数プロット [2]。

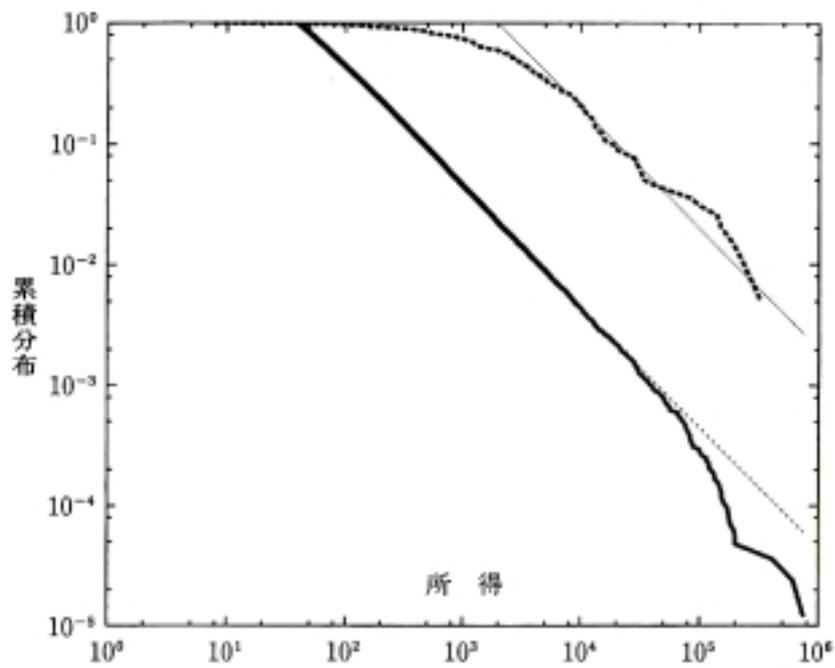


図 2: 所得が 4000 万円以上の日本の企業約 85000 社について横軸に所得、縦軸に企業数の累積をとった両対数プロット。分布がきれいに -1 の直線にのっているのが見て取れる [4]。

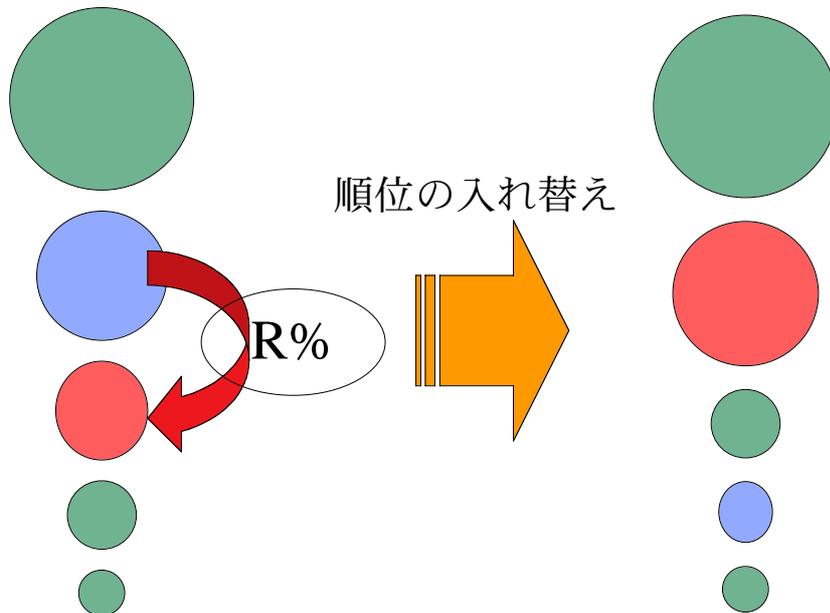


図 3: 選ばれた取引引き企業（赤）が1つ順位が上の企業（青）から資産の $R\%$ をうけとり成長する。その後、もう一度資産の大きい順に並べかえる。資産を受け取った企業（赤）は、成長して順位があがり、受け渡した企業（青）は、順位が下がっている。

3 モデルの説明

ジップの法則から、大きな所得の企業は少なく、小さな所得の企業は多い、つまり企業の規模と数が反比例するということが推測できる。そこで、企業間の取引引きについて、ある企業からその下請け企業に金が流れ、下請け企業から親企業に物が流れる、親会社、子会社、孫会社といった、企業の階層的な構造に注目してモデルをたてた。

まず、簡単にモデルの概要を説明する。

1. 企業の数と、各企業の資産の大きさをきめる。簡単のため資産の初期値すべての企業で同じ値とする。
2. 資産の大きい順に企業を並べる。
3. 取引引きを行わせる企業 i を乱数で選ぶ。
4. 1つ順位が上の企業 $i - 1$ から、その資産に比例した額を受け渡す。

この2から4の作業をくり返す（図3）。この資産の受け渡しを取引とみなした。

特例として、ステップ3で順位が1位の企業が選ばれたときは、1位の企業の資産の $R\%$ を全ての企業に与えるようにした。これは、一定の金を閉じた構造の中で受け渡すのではなく、出回る金を増やし、モデル全体を成長させるためである。

次に、シミュレーションプログラムの具体的な説明をする(図4)。

以下の変数を使う：

- N : 企業の数
- F : 取り引き回数
- $number$: 企業番号
- $zyuni$: 企業の順位
- $comp$: 企業の資産
- $income$: 企業の所得
- R : 受け渡す金の資産に対する比率(%)

ここで、先ほど述べた通り、 $所得 = (\text{入ってきた金の総額}) - (\text{出ていった金の総額})$ であるから、 $income = comp - (comp \text{の初期値})$ とした。

1. N と F の入力

企業の数 N と取り引き回数 F をきめる。

2. 取り引きのループ開始

取り引き回数だけくり返す。

3. 取り引き企業の選択

乱数によって取り引きさせる企業を選ぶ。

4. R の決定

ここでは $R = 30\%$ に固定してシミュレーションを行った。

5. 取り引き

(a) 乱数で選ばれた企業の順位が1位だった時

順位1位の企業の資産の $R\%$ をすべての企業に与え、モデル全体を一樣成長させる。

(b) その他の順位の企業が選ばれた時

一つ上の順位の企業から $R\%$ の資産を受け取る。

6. 順位の入替え

取り引きによって変わった資産について、資産の大きい順に企業を並べ直す。

7. 取り引きのループ終了

8. 分布の出力

適当な回数ループを繰り返した後、資産の分布を出力する。

9. 所得の初期化

所得を 0 に戻す。

このようにモデルをたてると、金は順位の上の企業から下の企業に流れる。つまり、順位が上の企業ほど消費者に近く、下ほど生産者に近い企業と言える。

4 モデルの結果

以下でシミュレーションの結果を説明する。

図 5 は、 10^5 回取り引きを行わせたときの分布である。分布は安定せず、直線ではなく弓なりの分布になっている。 10^6 回取り引きを行わせると (図 6)、分布が直線に近付き、ジップの法則に収束しかけている。 10^7 回取り引きを行わせると (図 7)、分布が傾き -1 の直線にのり、ジップの法則に収束しているのがわかる。このように、取り引きを繰り返すにつれて徐々にジップの法則に収束しているのが見て取れる (図 8)。

図 9 は、取引回数 10^6 以降、つまり図 6 以降で、ジップの法則に収束した後の任意の 2 企業の順位の変動を見たものである。 10^6 以降の分布は安定しているように見えるが、その内部では激しく企業が時間発展している。この順位の変動は、当然 R の値が大きいほど大きい。

上のモデルでは簡単のため $R = 30\%$ に固定したが、ジップの法則に収束する性質はより一般的なものである。例えば、

- 図 10 は $R = 70\%$ で取り引きを 10^7 回行ったものである。 R が大きいほど速くジップの法則に収束するが、傾き -1 の直線にのる企業数が $R = 30\%$ の場合と比べて少ない。 R の値はなるべく小さくし、取り引き回数を多くして、徐々に収束させた方がよりきれいにジップの法則が確認できる。
- 図 11 は、 R を取り引き毎に、 $0 \sim 99\%$ の乱数で選び、取り引きを 10^7 回行ったものである。グラフに多少の凹凸が見られるが、それでもジップの法則は再現できている。

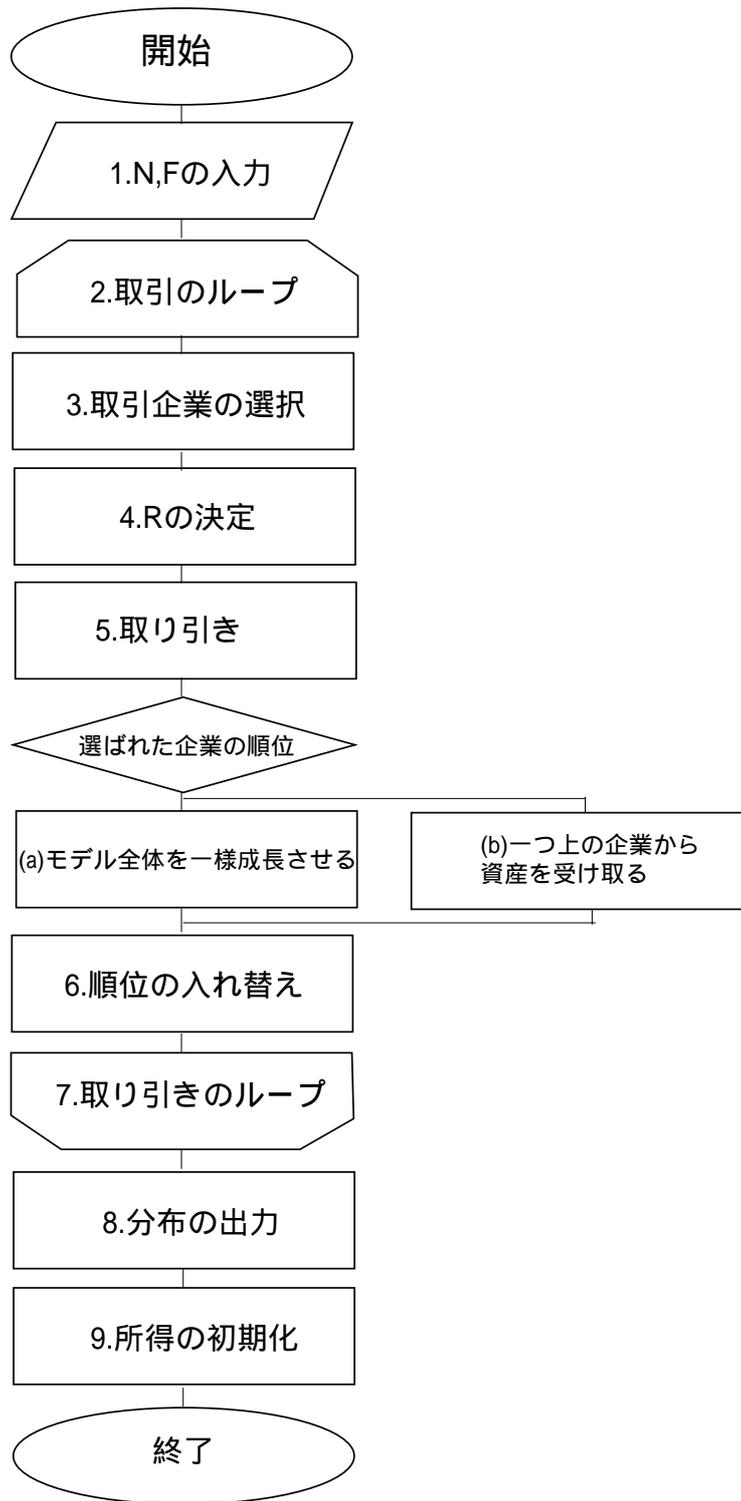


図 4: プログラムの流れ図

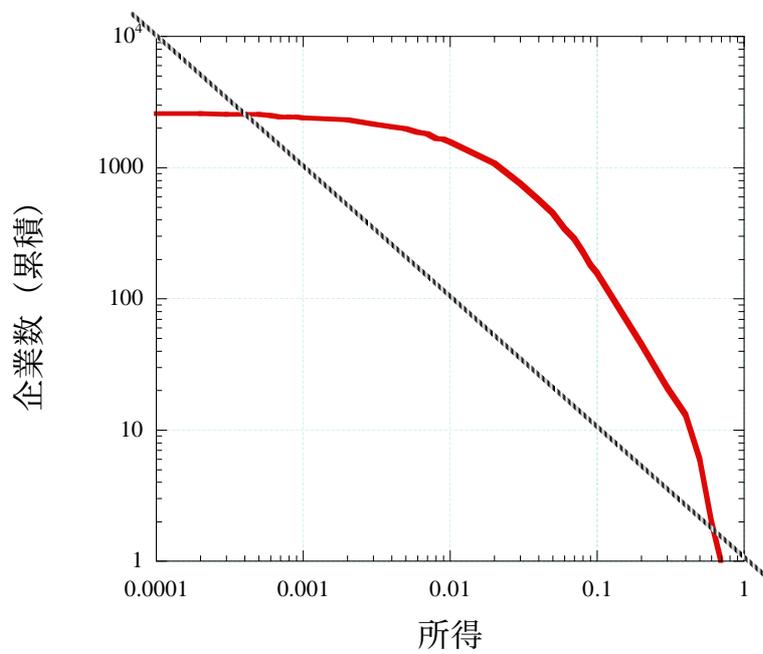


図 5: 取り引きを 10^5 回行ったときの所得分布の両対数プロット。横軸は所得、縦軸はその所得以上を持つ企業数。点線は傾き -1 の直線。まだ分布は安定していない。

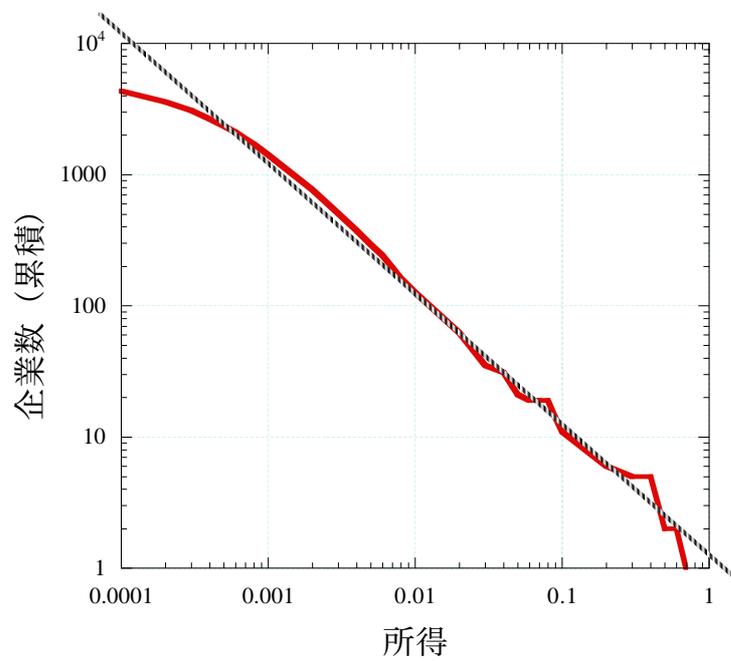


図 6: 取り引きを 10^6 回行ったときの所得分布の両対数プロット。横軸は所得、縦軸はその所得以上を持つ企業数。分布が徐々に傾きが -1 の直線 (点線) に近付いている。

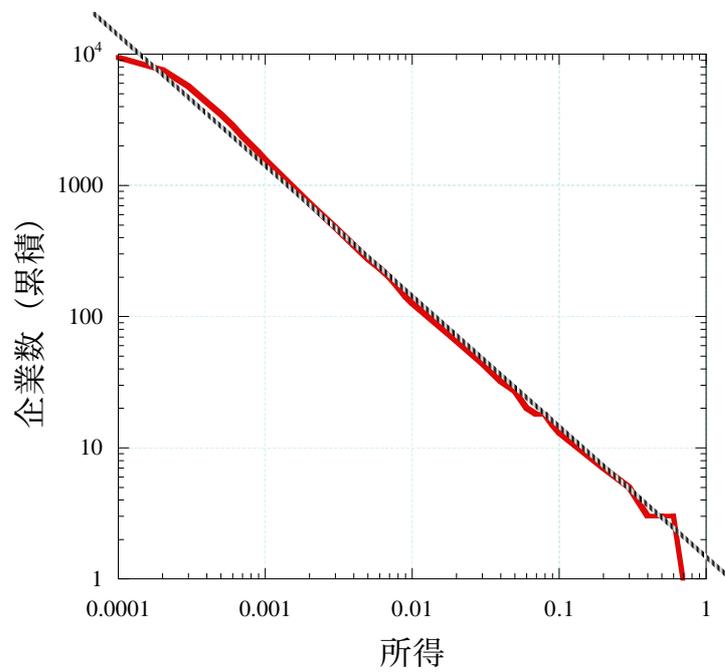


図 7: 取り引きを 10^7 行ったときの所得分布の両対数プロット。横軸は所得、縦軸はその所得以上を持つ企業数。傾きが -1 の直線 (点線) に非常によく乗っている。

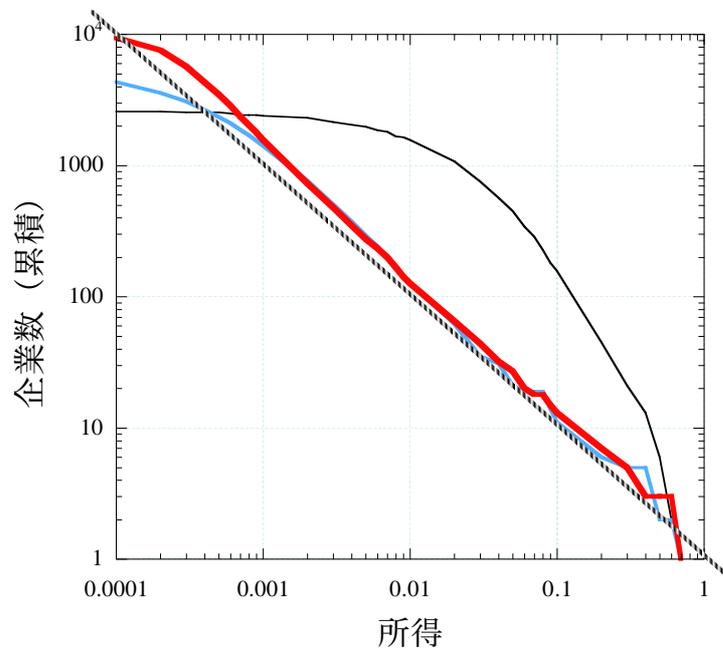


図 8: 取り引き回数 10^5 (黒) 10^6 (青) 10^7 (赤) の所得分布を重ねて見たもの。点線は傾き -1 の直線。取り引きを繰り返すにつれて徐々に傾き 1 の直線 (点線) に近付いているのがわかる。

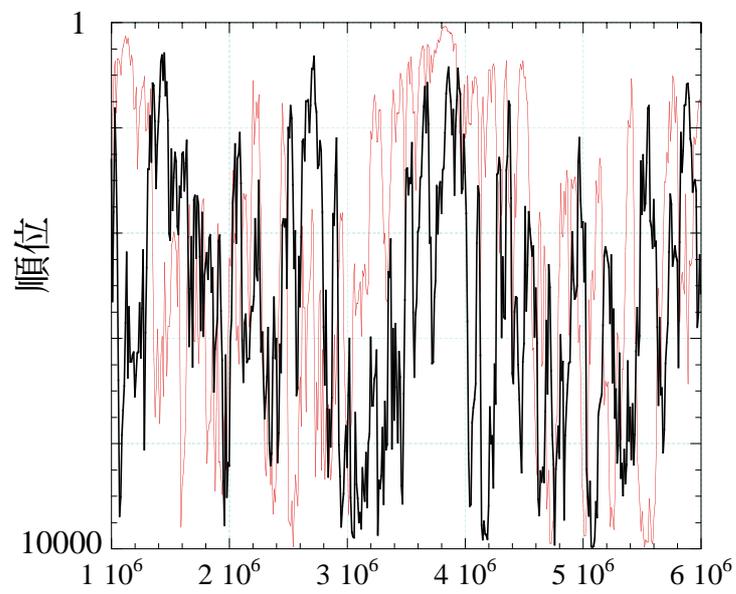


図 9: 任意の 2 企業の順位変動。横軸が取引回数、縦軸が順位。10⁶ 以降のジップ則に安定した後の順位変動だが、内部では激しく順位が入れ代わっている。

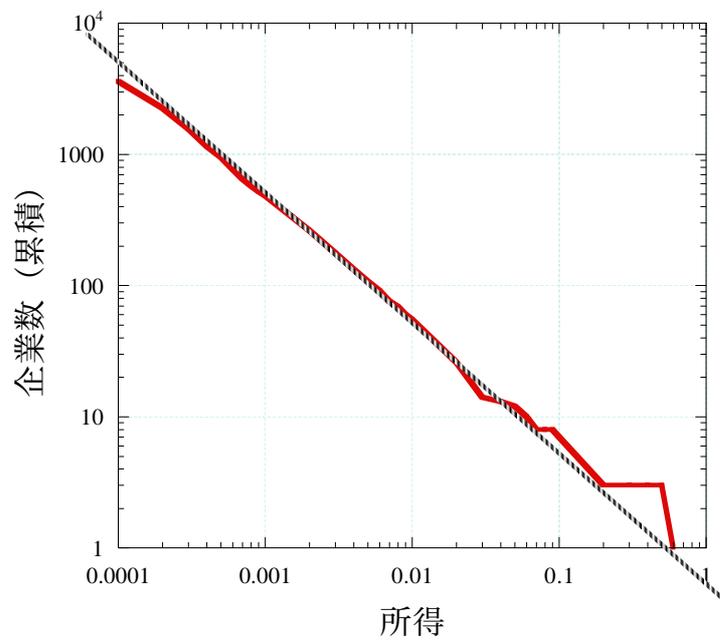


図 10: 受け渡す資産の比率 $R = 70\%$ に固定し、取り引きを 10^7 回行ったもの。点線は傾き -1 の直線。

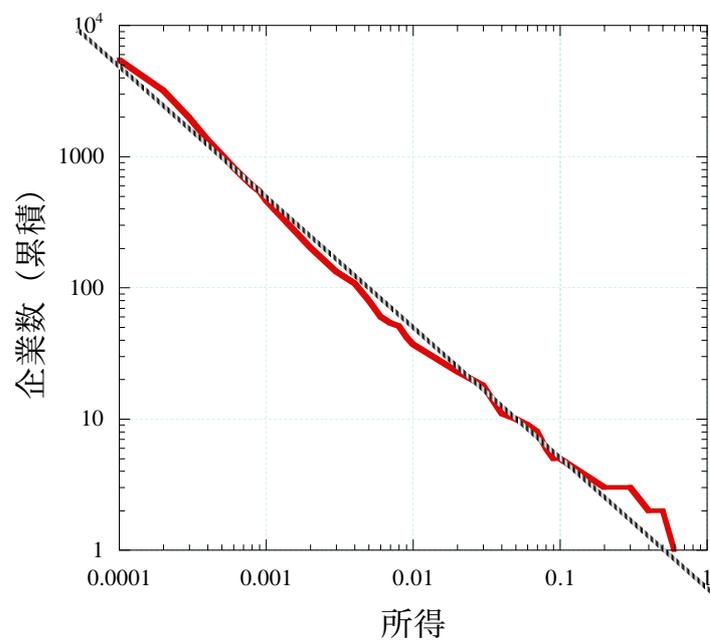


図 11: 受け渡す資産の比率 R を 0 ~ 99 % で取り引きを 10^7 回行ったもの。点線は傾き -1 の直線。 $R = 30$ に固定したものより、グラフに多少の凹凸が見られるが、ジップの法則は確認できる。

5 まとめ

このモデルで企業の所得分布のジップ則が再現出来た。このモデルでは金が、所得の大きいものから小さいものに流れるモデルである。ここで逆に、金の流れる方向が、所得の小さいものから大きいものへ流れるようなモデルでも図7と同様の結果が再現できる。このことから、資産に比例する額の受け渡し、つまり個々の企業の持つ資産に見合った額の取り引きが行われることが、図2のような所得分布を示す一因と考えられ、ジップの法則はこのような階層的な構造に起因しているのではないかと考えられる。

今後の課題は、まずコンピュータシミュレーションで行ったこのモデルを、解析的手段で再現することである。さらに企業の所得にはこのほかにも資産の大きい企業ほど安定しているということを示す、

$$(\text{資産のゆらぎ}) \propto (\text{資産})^{-0.2} \quad (4)$$

という関係や、所得と資産の

$$(\text{所得}) \propto (\text{資産})^{0.85} \quad (5)$$

などのべき乗関係があることが知られている [3]。これらの関係を再現できるモデルにしていきたい。

参考文献

- [1] 高安秀樹 『フラクタル』(朝倉書店、1987)
- [2] 武者利光 『ゆらぎの世界』(講談社)
- [3] 高安秀樹 / 高安美佐子 『経済・情報・生命の臨界ゆらぎ』(ダイヤモンド社)
- [4] K.Okuyama, M.Takayasu and H.Takayasu, Physica A269(1999), 125.

A 企業の所得分布シミュレーションのプログラムリスト

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#include<time.h>

#define _N 1000
#define _F 6e+5+1

int main()
{
    int i,l,m,n,ransu,ex,number[_N],zyuni[_N],num1,num2;
    float j;
    static int dis;
    float R;
    double comp[_N],d,k,compAll,income[_N],incomeAll;

    FILE *datafile,*datafile2,*datafile3;

    srand((unsigned int)time(NULL));

    i=l=m=n=ransu=ex=j=dis=R=d=k=incomeAll=incomeAll=0;
    for(i=0;i<_N;i++){
        comp[i]=1;
        income[i]=0;
        number[i]=i;
        zyuni[i]=i;
    }

    datafile=fopen("soturon.dat","w");
    datafile2=fopen("change.dat","w");
    datafile3=fopen("change2.dat","w");
```

```

for(l=0;l<_F;l++){

    /*model*/
    ransu=rand()%_N;
    R=30;

    if(ransu==0){

        k=comp[0]*R/100;
        for(i=0;i<_N;i++){
comp[i]=comp[i]+k/_N;
income[i]=income[i]+k/_N;
        }

    }/*if ransu==0*/

    else if(ransu!=0){
        k=comp[ransu-1]*R/100;
        comp[ransu]=comp[ransu]+k;
        comp[ransu-1]=comp[ransu-1]-k;
        income[ransu]=income[ransu]+k;
        income[ransu-1]=income[ransu-1]-k;
    }

    /*rank*/
    for(i=0;i<_N-1;i++){
        if(comp[_N-1-i]>comp[_N-2-i]){
d=comp[_N-1-i];
comp[_N-1-i]=comp[_N-2-i];
comp[_N-2-i]=d;
d=income[_N-1-i];

```

```
income[_N-1-i]=income[_N-2-i];
income[_N-2-i]=d;
```

```
num1=number[_N-1-i];
num2=number[_N-2-i];
```

```
zyuni[num1]=_N-2-i;
zyuni[num2]=_N-1-i;
```

```
number[_N-1-i]=num2;
number[_N-2-i]=num1;
```

```
    }
}
```

```
    for(i=0;i<_N-1;i++){
        if(comp[i]<comp[i+1]){
d=comp[i];
comp[i]=comp[i+1];
comp[i+1]=d;
d=income[i];
income[i]=income[i+1];
income[i+1]=d;
```

```
num1=number[i];
num2=number[i+1];
```

```
zyuni[num1]=i+1;
zyuni[num2]=i;
```

```
number[i]=num2;
number[i+1]=num1;
```

```
    }
}
```

```

        /*zyuni*/
        if(1%1000==0){
fprintf(datafile2,"%d \n",zyuni[0]);
fprintf(datafile3,"%d \n",zyuni[1]);
        }

        /*kikakuka
        k=comp[0];
        for(i=0;i<_N;i++){
comp[i]=comp[i]/k;
income[i]=income[i]/k;
        }
        */

        if(1%100000==0&&1!=0){
printf("%d\n",1);
        }

        if(1%100000==0&&1!=0){

        /*distribution*/

        for(ex=-20;ex<=20;ex=ex+1){

for(j=pow(10,ex);j<pow(10,ex+1);j=j+pow(10,ex)){
        for(i=0;i<_N;i++){
                if(income[i]>j){
                        dis++;
                }
        }
        if(dis!=0&&dis!=_N){
                fprintf(datafile,"%f %d\n",j,dis);
        }
}

```

```

    dis=0;
}

    }

    fprintf(datafile,"%&\n");

    for(i=0;i<_N;i++){
income[i]=0;
    }

    }

}/*1 roop*/

    for(i=0;i<_N;i++){
    compAll=compAll+comp[i];
    }

for(i=0;i<_N;i++){
    incomeAll=incomeAll+income[i];
}

fclose(datafile);
fclose(datafile2);
fclose(datafile3);

}

```