

価格変動のフラクタル性への 統計物理的アプローチ

河上 昌弘

羽田野研究室

2000年2月29日

概要

為替相場や株式市場といった実際のマーケットにおける価格の変動は非常に複雑に変動している。これらの変動が一体なぜ、そしてどのようにして起こるのかという疑問を抱く。様々な変動の理由が考えられる中で、本研究では売買の素過程のみに着目した単純なモデルを考察した。そのモデルをシミュレーションした結果、価格変動のいろいろな特徴を再現する事ができた。統計物理の視点から、価格変動のダイナミクスに迫る。

目次

1	はじめに	4
2	マーケットでの価格の決定	6
3	モデルの概要	7
3.1	初期値	7
3.2	取り引きができるディーラーを決める	7
3.3	取り引き成立後のディーラーの動き	7
3.4	ディーラーの時間発展	8
3.4.1	個性	8
3.4.2	思惑	8
3.4.3	前の取り引きの影響	9
3.5	需要・供給の分布の維持	10
3.5.1	$\min P_{\text{sell}} - \max P_{\text{buy}} > \Lambda$	10
3.5.2	$\max P_{\text{buy}} > \min P_{\text{sell}}$	11
4	モデルの振舞	12
4.1	スケールの変化	12
4.2	影響 c の変化	12
4.3	個性 a の変化	13
5	フーリエ変換	15
6	価格差の確率密度関数	19
7	まとめ	21
A	プログラムリスト	24
A.1	モデル	24
A.2	フーリエ変換	29
B	高安モデルの解析	31
B.1	はじめに	31
B.2	モデルの概要	31
B.3	モデルの振舞い	32
B.4	モデルの解析	32

B.5	まとめ	33
B.6	プログラムリスト	36

1 はじめに

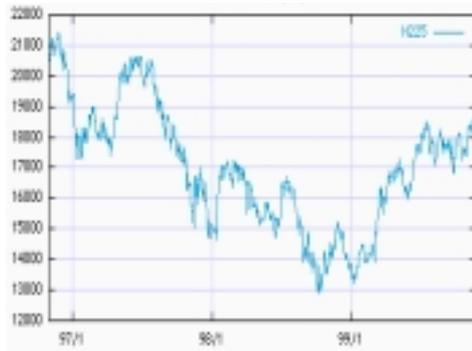


図 1: '97/11/21 ~ '99/11/22 における日経平均株価のチャート

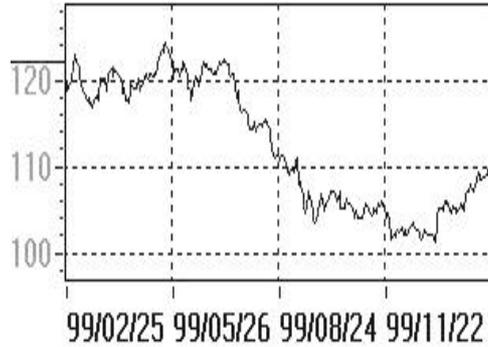


図 2: 最近1年間の¥/\$レートの変動のチャート

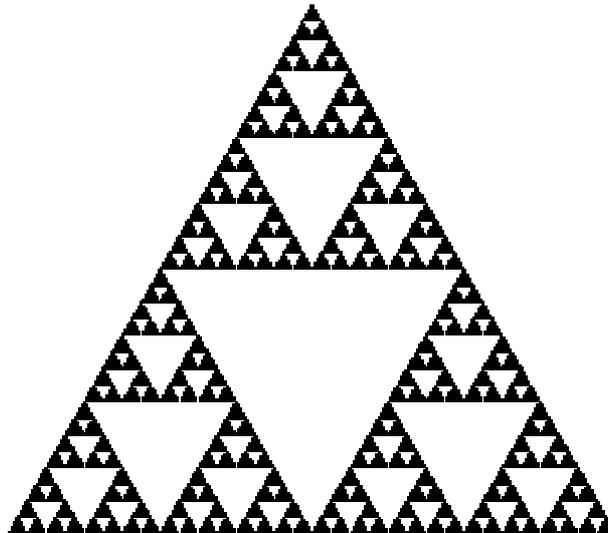


図 3: シルピンスキーのギヤスケット

図 1、図 2 は株価、為替などといった実際のマーケットにおける価格の変動を表したチャートである。これをみれば分かるように、マーケットにおける価格は非常に激しく上下し、その動きは全くランダムのように見える。ここで単位時間を、1年から1ヵ月、更には1日にスケールを変えても同様な激しい上下運動が見られる事から、価格の変動はフラクタルと非常に関係が深いのではないかという期待が持てる。

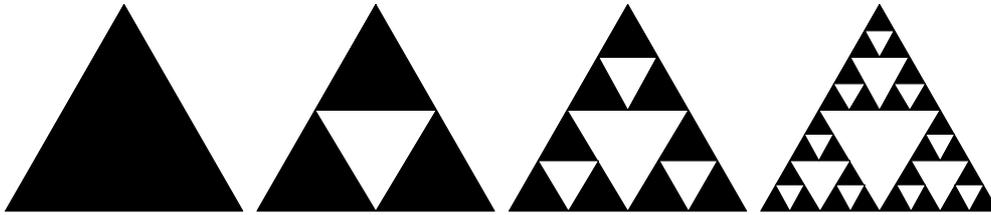


図 4: シルピンスキーのギasketができる流れ

ここでフラクタルの説明を簡単にする。図3はシルピンスキーのギasketという、フラクタルを代表する図形 [1] の一つである。この図形は以下のように作られる。まず正三角形の各辺の中点を結ぶ正三角形を切り抜く。さらに残りの三つの正三角形においても同様の作業を行い、各辺の中点を結ぶことによってできる真ん中の正三角形を切り抜く。この作業を無限に繰り返すことによってシルピンスキーのギasketが作られる (図4)。この図形の一部を取り出して拡大すると、もとの図形と同様の図形が得られる。また、この図形は更に大きな図形の一部であるとも考えられる。つまりフラクタルの特徴の一つに自己相似性 [2] が挙げられる。言い替えれば、特徴的な長さを持たない図形ということである。

価格の変動の理由としては、政治的要因や国際情勢、各社の財務体質など、数学的にモデル化するには極めて困難な要因も数多く考えられる。しかし、本研究では多くの人を取り引きを行うことにのみ着目した単純なモデルを考えた。そこから得られた変動が実際のマーケットにおける価格変動の特徴をよく再現した。特に、価格変動のフラクタル性について調べたところ、フラクタルの特徴である自己相似性がみえ、さらに時系列や価格変動の頻度に冪乗則がみられた。

2節では実際のマーケットにおいて価格がどのように決定されているのかを述べる。3節では今回シミュレーションを行ったモデルの概要を説明する。4節ではシミュレーションによって得られた価格変動の振舞いを紹介する。5節では得られた価格変動をフーリエ変換し変動の時間相関を調べる。6節では価格差の頻度について解析する。

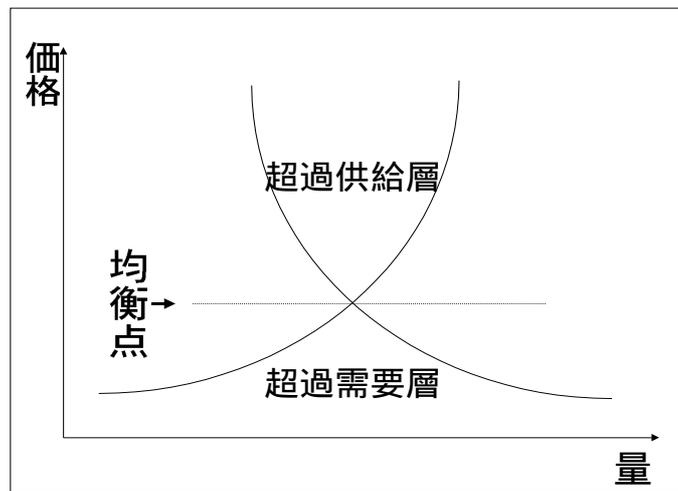


図 5: 需要供給曲線. 価格が上がると超過供給になり、価格が下がると超過需要となる. 市場では需要と供給の均衡点によって価格が決定される.

2 マーケットでの価格の決定

実際の市場価格は需要供給曲線 (図 5) の均衡点によって決定される。均衡点とは需要と供給の量が一致しているところを指す。それより価格が高いところでは供給が多く需要が少ない。逆に低いところでは需要が多く供給が少ない。実際に市場では、需要と供給の量が変わるとすぐにつり合う方向へと圧力がかかる。価格が上下することにより、その時点での需給のバランスが保たれることになる。スーパーマーケットやコンビニエンスストアなどでは常に商品が店頭で陳列されている事を考えると、価格は需要・供給の均衡点よりやや超過供給層に設定され、商品がすぐになくならないようになっている。それにより価格は安定している。それに対して為替や株などの取引は、まさに需要・供給の均衡点によって取引が行われているため、需要と供給のバランスは常に保たれているが、価格は激しく上下している。

需要・供給は常に一定ではなく、時間的に揺らぎがある。それらの均衡点も当然時間によって大きく揺らいでいる。均衡点からほんの僅かずつただで価格の変動が非常に小さくなる事を考えると、価格の変動はちょうど均衡点での取引である事に大きく関係しそうだ。そこで今回は、需要と供給によって決定される価格を忠実に再現するため、以下に紹介する決定論的なダイナミクスによって得られる変動を解析した。

3 モデルの概要

この節では、本研究で考案した新しいモデルを紹介する。このモデルの特徴は需要と供給に分け、売る側と買う側との接点で取引を行うことだ。需要供給の特徴をとらえ、均衡点を再現した。

3.1 初期値

供給層に相当する売り手と、需要層に相当する買い手の二層に分ける。ここで、取引（売買）を行う人をディーラー (dealer) と呼ぶ。ディーラーの数を N 人とすると、売り手 (seller)、買い手 (buyer) はそれぞれ $N/2$ 人存在する。

まずそれぞれのディーラーに初期値 ($t = 0$ における提示価格) を与える。 $[100, 100 + h]$ の間で一様乱数によって 売り手に提示価格 P_{sell} を与える。同様に $[100 - h, 100]$ の間で買い手に提示価格 P_{buy} を与える。

3.2 取引ができるディーラーを決める

取引は、最も安い売り値 ($\min P_{\text{sell}}$) を提示しているディーラーと、最も高い買値 ($\max P_{\text{buy}}$) を提示しているディーラーとの間で行われる。取引価格はそれらのディーラーの提示価格の平均をとることにする (図 6)。つまり取引価格を P とすると、

$$P = (\min P_{\text{sell}} + \max P_{\text{buy}})/2 \quad (1)$$

と表せる。本研究ではこの P の時間発展を価格の変動とした。

3.3 取引成立後のディーラーの動き

一旦取引が成立すると、取引を終えたディーラーはポジションを変える。つまり、今回の取引で買い手であったディーラーは売り手側へ、売り手であったディーラーは買い手側へ移り、次の取引に向け新しい価格を提示する事になる。移動の位置は、取引成立時の価格から $[0, h]$ の間で与えられる乱数だけ、買い手は値を上げ、売り手は値を下げる (図 7)。

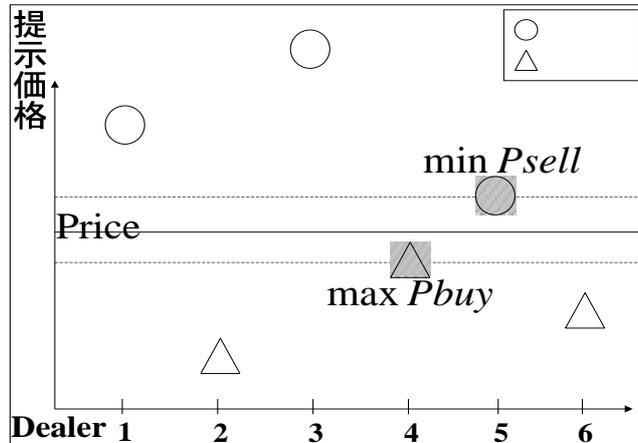


図 6: $\min P_{\text{sell}}$ と $\max P_{\text{buy}}$ との間で取引を行う. その平均値を取引価格 P とする.

3.4 ディーラーの時間発展

i 番目のディーラーの提示価格の時間発展は次の式によって与えられる。

$$P_i(t+1) = P_i(t) + c \times (P_i(t) - P_i(t-1)) \mp (a_i + b_i) \quad (2)$$

$$\begin{cases} - \dots \text{ 売り手} \\ + \dots \text{ 買い手} \end{cases}$$

3.4.1 個性

ディーラーには強気な人、弱気な人などそれぞれに個性を持たせる事とする。個性 a_i は a というパラメータを使って $[0, a]$ の範囲で一様乱数によって各ディーラーに与える。あらかじめ初期条件として与えた個性は時間発展中も不変である。

3.4.2 思惑

さらに各取引毎の思惑として、個性とは別の変数を与える。 b というパラメータを使って、 $[0, b]$ の範囲で一様乱数によって取引毎に各ディーラーに思惑 b_i を与える。

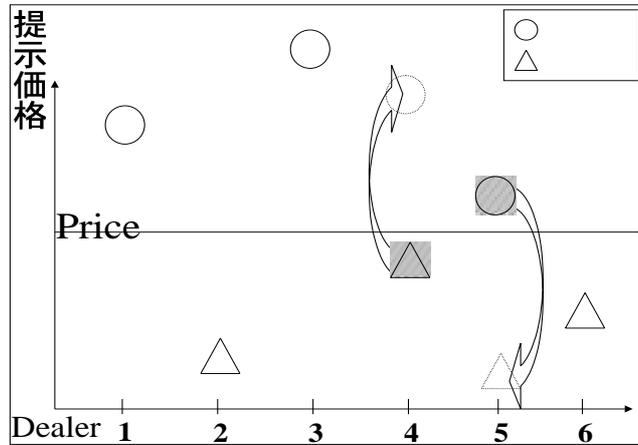


図 7: 取り引きを終えたディーラーは、次の取り引きに向け立場を変える

3.4.3 前の取り引きの影響

更に、前の取り引きの影響を次の取り引きに反映させる。これは上げ相場においてはほとんどのディーラーが次も上がるだろうと考え、下げ相場においては次も下がるだろうと考える心理を再現させるものである。毎回の取り引きにおいて、前回と前々回の価格差にあるパラメータ c を掛けた値を全てのディーラーの提示価格に足す。つまり、前の取り引きが次の取り引きに与える影響は

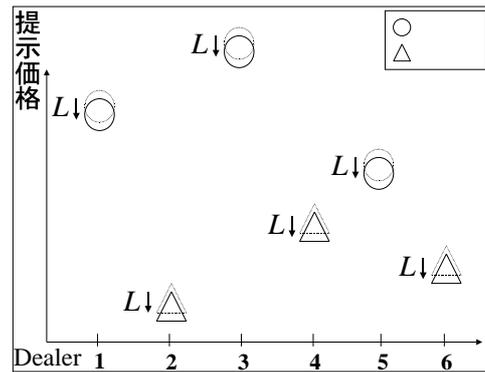
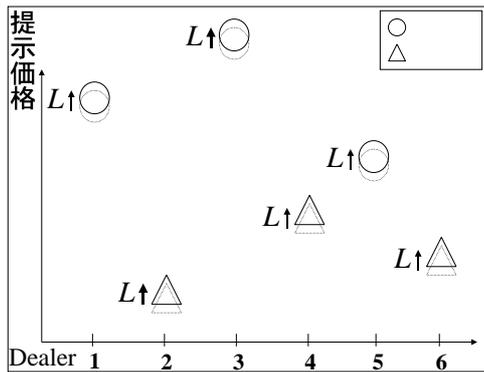


図 8: $c(P(t) - P(t-1)) = L \geq 0$ のときの、前の取り引きの影響. 図 9: $c(P(t) - P(t-1)) = L < 0$ のときの、前の取り引きの影響.

$$c(P(t) - P(t - 1)) \quad (3)$$

によって表せる。 $P(t) - P(t - 1) > 0$ ならばディーラーは値を上げ (図 8)、 $P(t) - P(t - 1) < 0$ ならば値を下げる (図 9)。価格差が大きければ次の取り引きへの影響も大きい事になる。

3.5 需要・供給の分布の維持

また、取り引きを繰り返すうちに、理想とする需要・供給の分布が崩れる場合が想定される。そのような場合には次のように対処する。

3.5.1 $\min P_{\text{sell}} - \max P_{\text{buy}} > \Lambda$

取り引きは最も安い売り値 ($\min P_{\text{sell}}$) を提示しているディーラーと、最も高い買値 ($\max P_{\text{buy}}$) を提示しているディーラーとの間で行われることは先に述べたが、これは両者が真の提示価格からある程度妥協していることを意味している。そこで、 $\min P_{\text{sell}}$ と $\max P_{\text{buy}}$ があまりに離れていると、取り引きをしない決まりにする (図 10)。パラメータ Λ を与え、

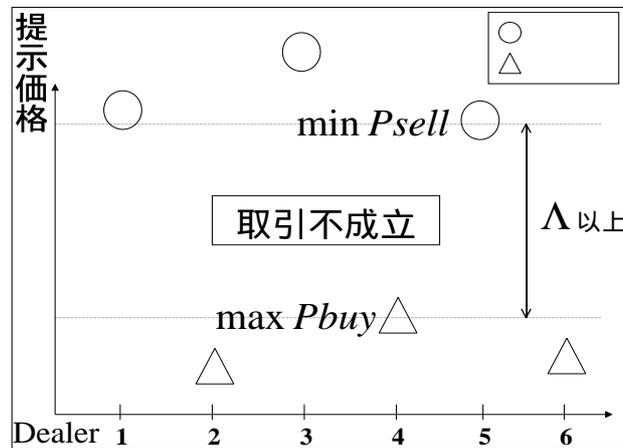


図 10: $\min P_{\text{sell}} - \max P_{\text{buy}} > \Lambda$ では取り引き不成立とする。

$\min P_{\text{sell}} - \max P_{\text{buy}} < \Lambda$ で取り引きを行い、 $\min P_{\text{sell}} - \max P_{\text{buy}} > \Lambda$ では取り引き不成立として次の取り引きに移る。この場合、もちろん $\min P_{\text{sell}}$ 、

$\max P_{\text{buy}}$ を提示しているディーラーがポジションを変えるなど、基本的なディーラーの動きは同じだが、前の取り引きが次の取り引きに与える影響 c は累積させる。取り引きが行われないと c の累積によって影響が大きくなってくる。

3.5.2 $\max P_{\text{buy}} > \min P_{\text{sell}}$

逆に、買値 ($\max P_{\text{buy}}$) が売り値 ($\min P_{\text{sell}}$) を上回っている場合を考える。これは、買い手は取り引き価格よりも高く買おう、売り手は取り引き価格よりも安く売ろうとしていることを意味し、矛盾している。そこで、この場合には式 (9) によって取り引きは行おうが、次の取り引き価格の提示方法を変える。個性と思惑に相当するベクトルの和を取り引き価格側に移動させたが、そのベクトル方向を逆にする。そうすると式 (2) は

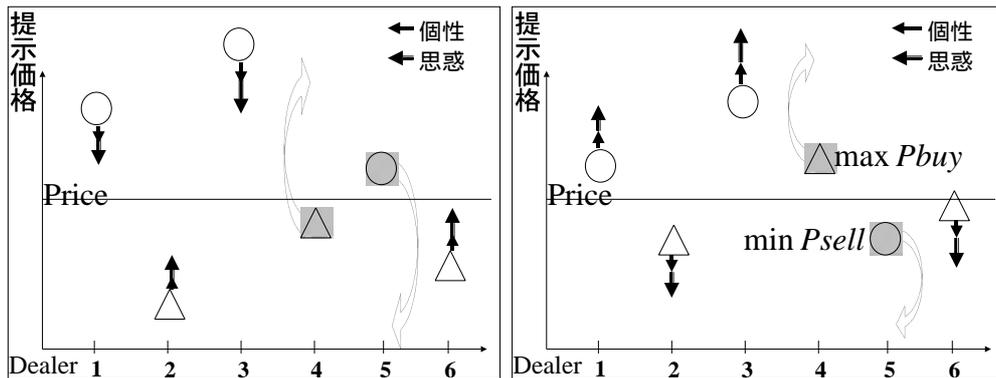


図 11: $\max P_{\text{buy}} \leq \min P_{\text{sell}}$ の場合のディーラーの動き. 図 12: $\max P_{\text{buy}} > \min P_{\text{sell}}$ の場合のディーラーの動き.

$$P_i(t+1) = P_i(t) + c \times (P_i(t) - P_i(t-1)) \pm (a_i + b_i) \quad (4)$$

$$\begin{cases} + \dots \text{ 売り手} \\ - \dots \text{ 買い手} \end{cases}$$

と変わる。取り引き価格から提示価格を離す事によって理想の需要・供給の分布を維持させる。

このモデルにおけるパラメータをまとめると、

- デイラーの数 N

- 初期ゆらぎ ($t = 0$ における売り手と買い手の提示価格の分散の範囲) と、取り引きが成立したディーラーの次の提示価格の範囲を示す h
- 各ディーラーの個性の範囲を示す a
- 各ディーラーの取り引き毎の思惑の範囲を示す b
- 前の取り引きが次の取り引きに与える影響をあらわす c
- 売り手と買い手が取り引きをする提示価格の範囲 Λ

となる。以降ではディーラーの数 $N = 100$ 、初期ゆらぎ $h = 20$ 、 $\Lambda = 2$ と固定した。つまり、 $t = 0$ において $[100, 120]$ に売り手を 50 人、 $[80, 100]$ に買い手を 50 人置き、売り手と買い手の提示価格の差が 2 以内で取り引きをさせるよう設定した。従って、残り三つのパラメータは a 、 b 、 c を与えることによって、様々な条件における価格の変動を得る。

4 モデルの振舞

4.1 スケールの変化

図 13 に $a = 0.15$ 、 $b = 0.25$ 、 $c = 0.3$ の場合における、取り引き価格 $P(t)$ の時系列を示す。価格が非常に激しく動いている [3] のが分かる。これは、1,000,000 回のループを行った結果であるが、取り引きが起こった回数が 1,000,000 回に達していないのは、取り引き不成立の場合がある為である。

図 13 の変動をスケールを変えて見たのが図 14(a) から (c) である。(a) は取り引きが起こった回数 200,000 回、(b) は 40,000 回、(c) は 8,000 回の部分をそれぞれ拡大している。いずれの変動においても同様の激しい上下運動が確認できる。これは価格変動の自己相似性を定性的に示している。つまり、一日の価格変動のチャートと一年間の変動のチャートを比べると、単位時間が異なるだけで変動の様子は区別できないということである。

4.2 影響 c の変化

次に、前の取り引きが次の取り引きに与える影響をあらわす c を変化した時の価格変動の変化について調べる。図 15 の (a)(b)(c) にはそれぞ

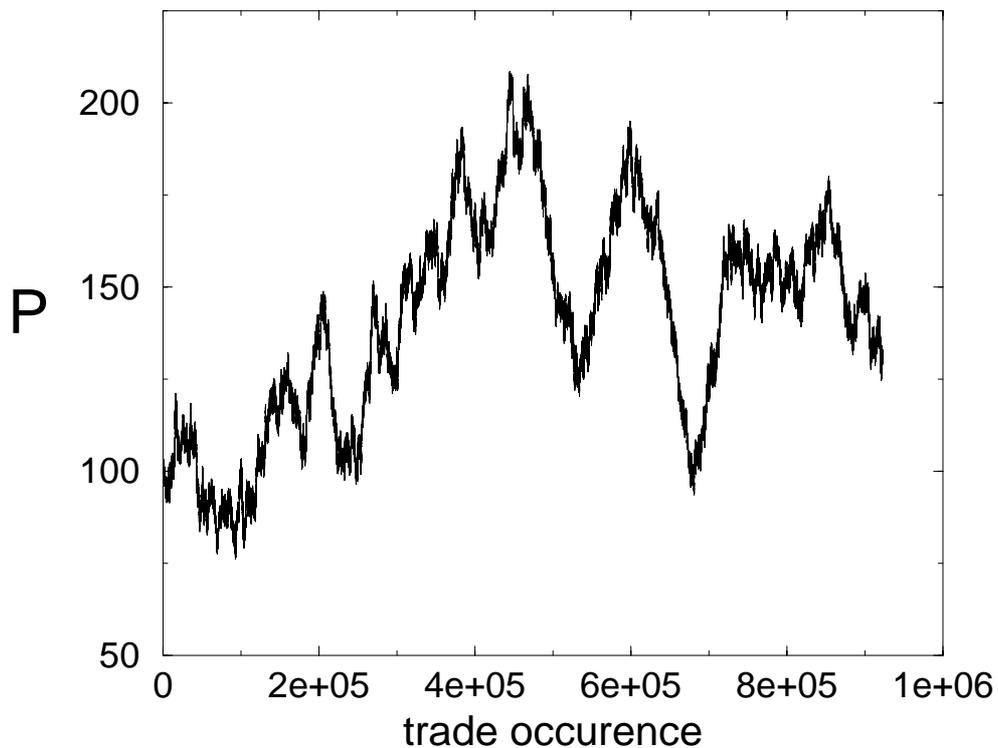
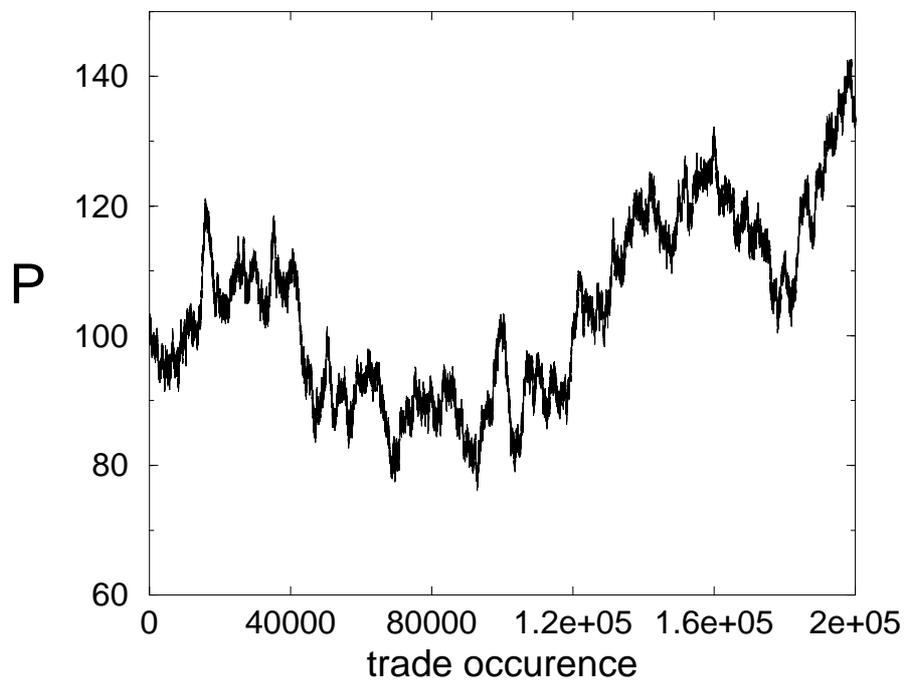


図 13: シミュレーションによって得られた価格変動. $a = 0.15$, $b = 0.25$, $c = 0.3$ の場合.

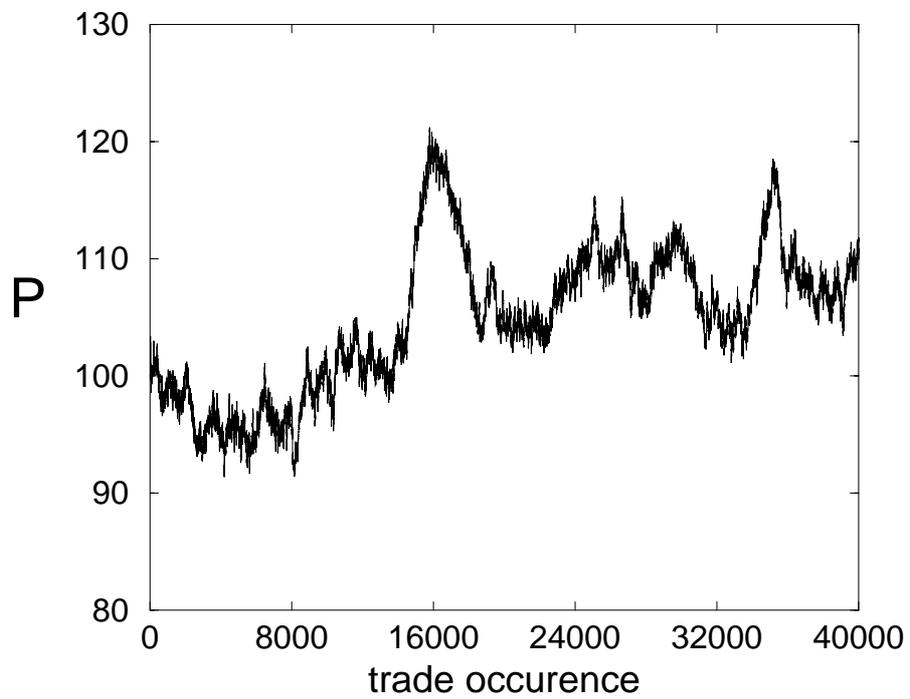
れ $c = 0.0$, $c = 0.1$, $c = 0.2$ と変えた時の変動を表している。前回の価格変動の影響が大きいと、変動の幅も大きくなり、影響が全くない $c = 0.0$ と $c = 0.3$ では価格のとり得る範囲が大きく違うのが分かる。

4.3 個性 a の変化

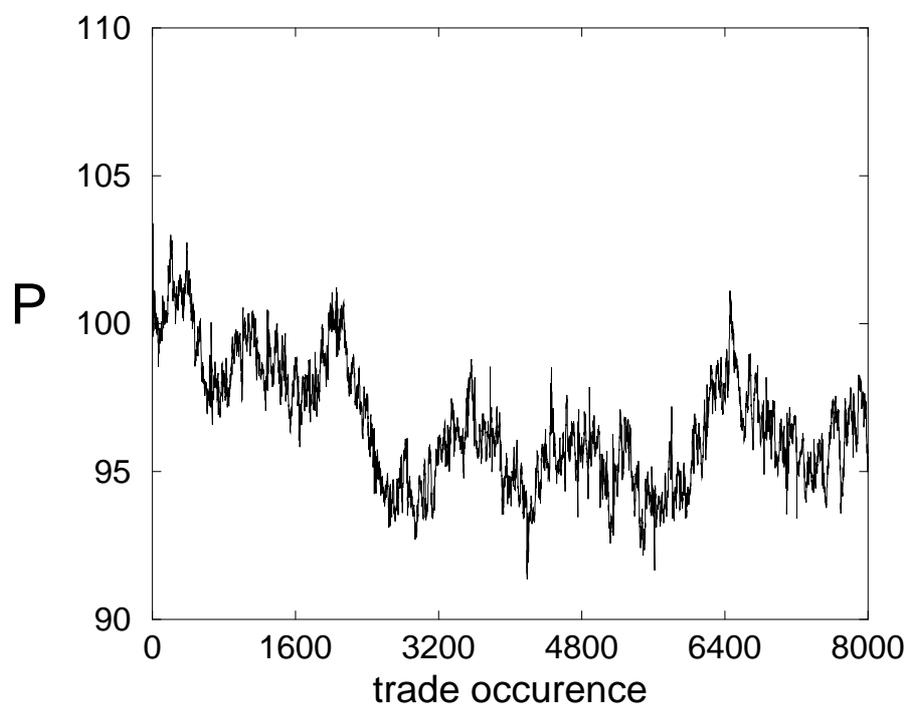
次に個性を調節するパラメータ a を変化させた。個性が小さいと $\min P_{\text{sell}} - \max P_{\text{buy}} > \Lambda$ となる機会が多く、取り引きできないことが多い (図 16(a) ~ (c))。



(a)



(b)



(c)

図 14: (a) は図 13 の最初の部分を拡大したもの. (b) は (a) の最初の部分を拡大したもの. (c) は (b) の最初の部分を拡大したもの.

5 フーリエ変換

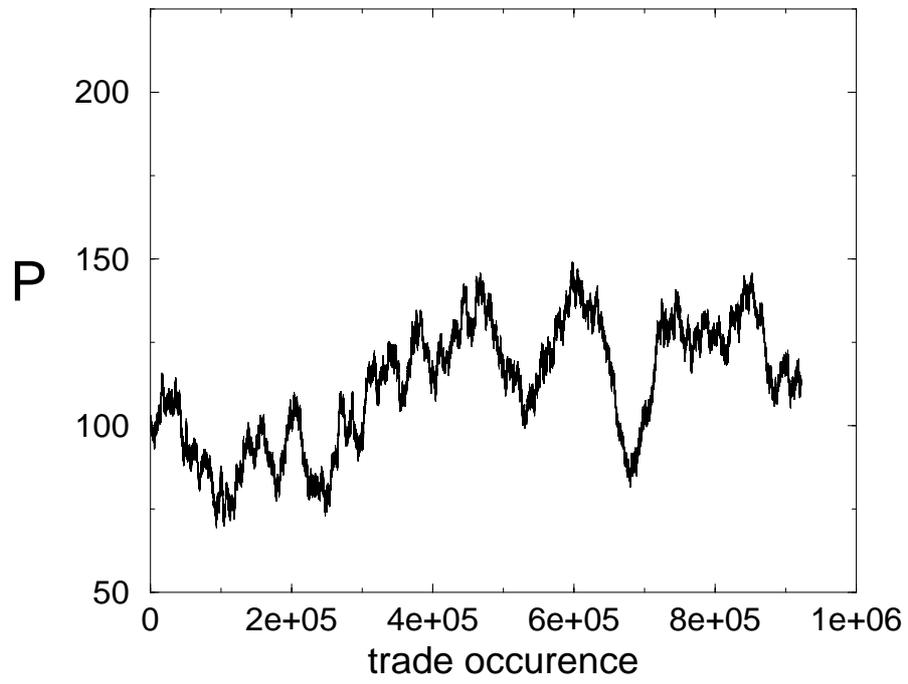
さらに、価格変動とフラクタルの関係を見出すため、定量的に解析を進めた。

得られた価格変動をフーリエ変換すると、非常に興味深い結果が得られた。価格変動 $P(t)$ のフーリエ変換は

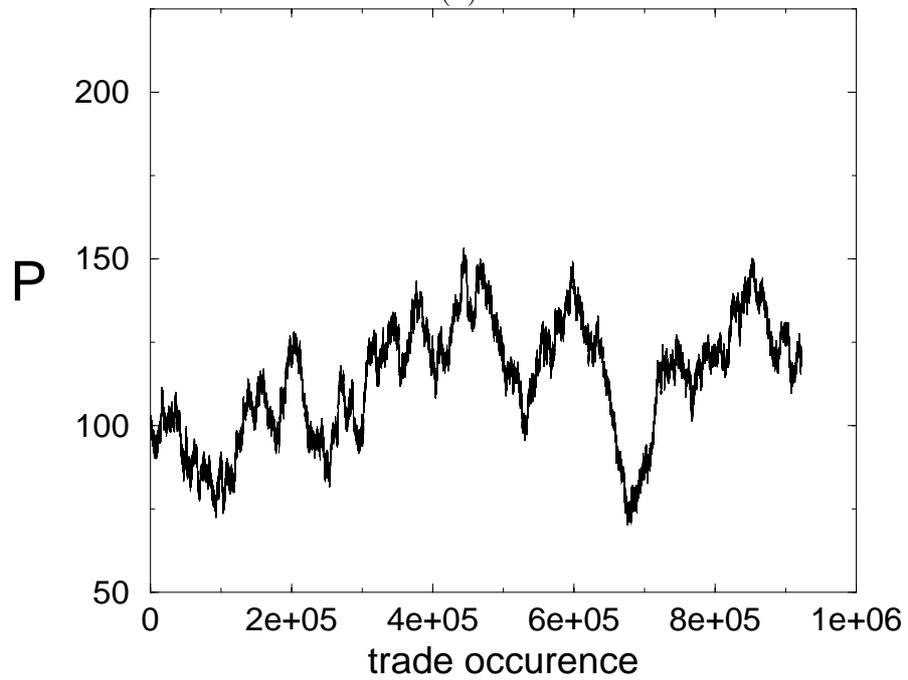
$$\operatorname{Re}\tilde{P}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P(t) \cos \omega t \quad (5)$$

$$\operatorname{Im}\tilde{P}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f(t) \sin \omega t \quad (6)$$

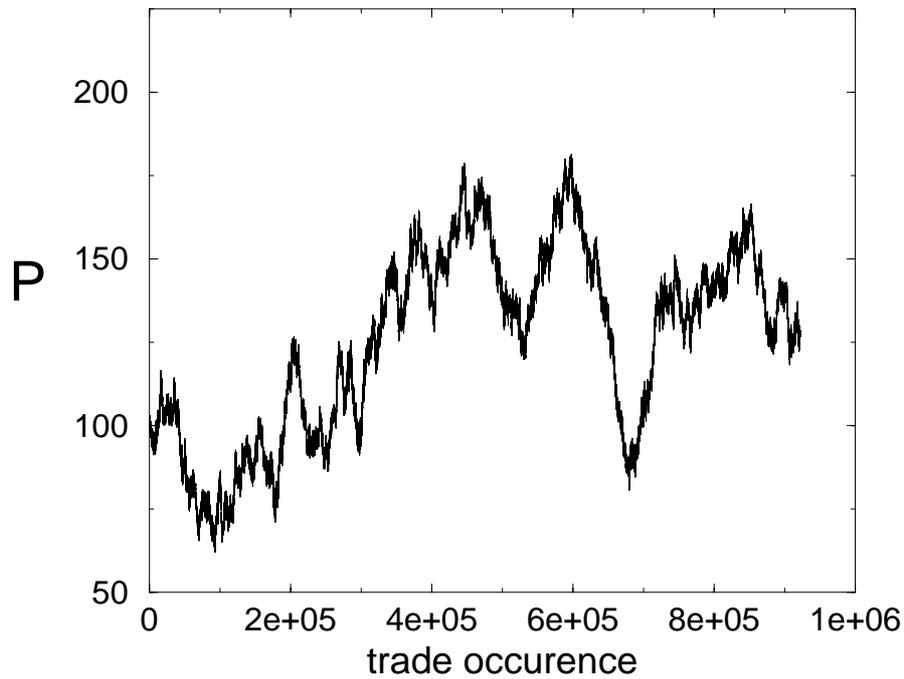
$$(0 \leq \omega < 2\pi)$$



(a)



(b)



(c)

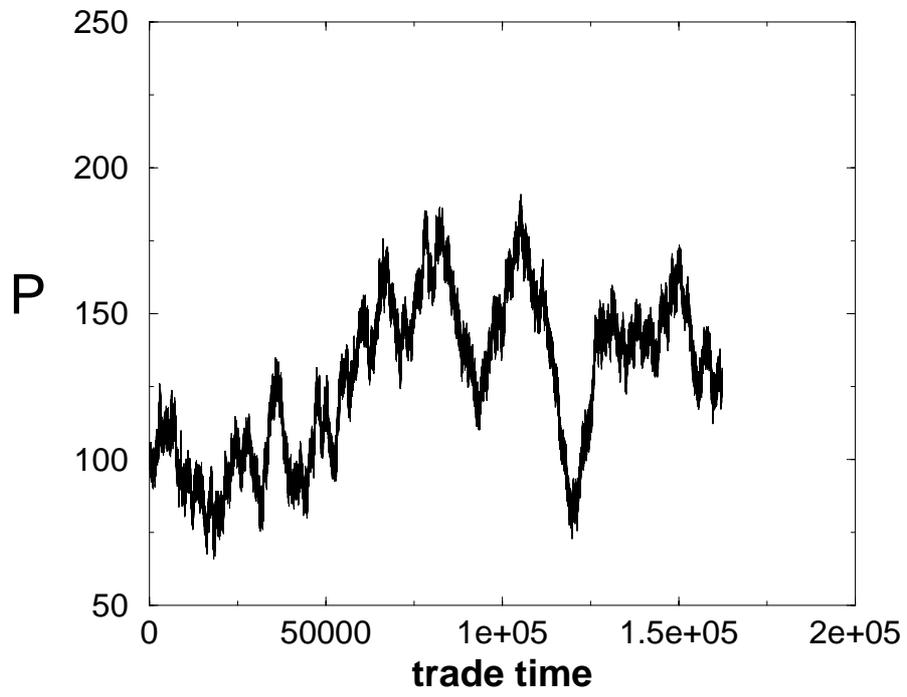
図 15: (a) は $a = 0.15, b=0.25, c = 0.0$ の場合の価格変動. (b) は $a = 0.15, b=0.25, c = 0.1$ の場合の価格変動. (c) は $a = 0.15, b=0.25, c = 0.2$ の場合の価格変動.

で与えられる。そのスペクトルは

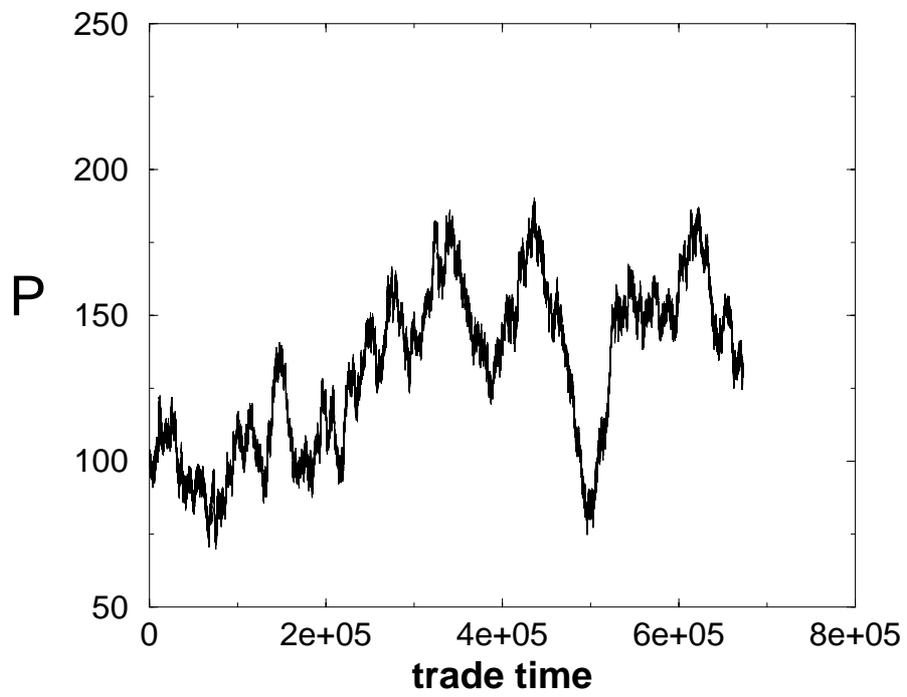
$$S(\omega) = |\tilde{P}(\omega)|^2 = (\text{Re}\tilde{P}(\omega))^2 + (\text{Im}\tilde{P}(\omega))^2 \quad (7)$$

と定義される。

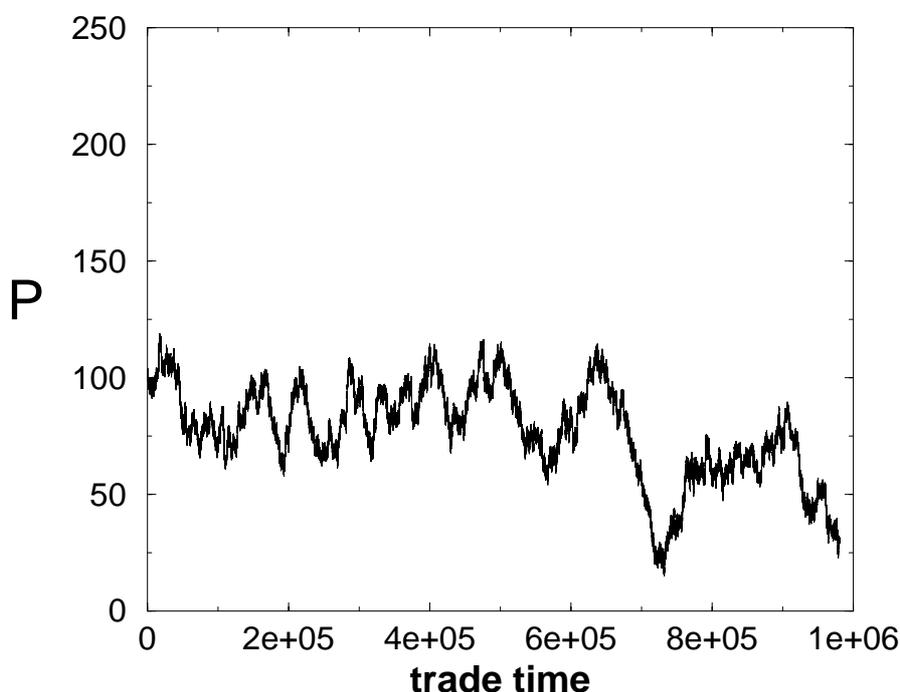
これによって得られた $S(\omega)$ を両対数プロットした。図 17 をみると、変動のパワースペクトルが綺麗な冪乗の揺らぎになっているのが分かる。これは、価格変動に特徴的な時間スケールがなく、時系列がフラクタルである事を示している。また、変動のパワースペクトルは ω^{-2} に比例しているのが分かる。実際のマーケットにおける価格変動のパワースペクトルも同様に ω^{-2} 付近であることが知られているのを考えると、今回のモデルは実際のマーケットにおける価格変動の特徴をよく再現しているのが分かる。



(a)



(b)



(c)

図 16: (a) は $a = 0.00$, $b = 0.25$, $c = 0.3$ の場合の価格変動. (b) は $a = 0.10$, $b = 0.25$, $c = 0.3$ の場合の価格変動. (c) は $a = 0.20$, $b = 0.25$, $c = 0.3$ の場合の価格変動.

6 価格差の確率密度関数

次に、取り引き毎の価格変動量 $\Delta P(t) = P(t) - P(t - 1)$ の時系列 (図 18) を、確率密度関数 [4] によって表してみた (図 19)。横軸に価格変動、縦軸にそれらの変動が起こる頻度を片対数プロットした。これをみれば分かるように、価格変動の頻度の分布はガウス分布では近似できない裾野の広がりを持っている。つまり、暴騰や暴落に相当する大きな価格変動が起きている事を表し、それらは冪乗分布に乗っているのが分かる。価格変動の絶対値を両対数でみると、価格の変動が大きい裾野の部分が直線になっている事からも、冪乗分布が確認できる (図 20)。

ちなみにオプション取り引きや先物取り引きなどのデリバティブ (金融派生商品) では、価格の変動を正規分布によって確率的に推定する手法をとっている。そもそもリスク回避の保険として生まれたこれらの取り引

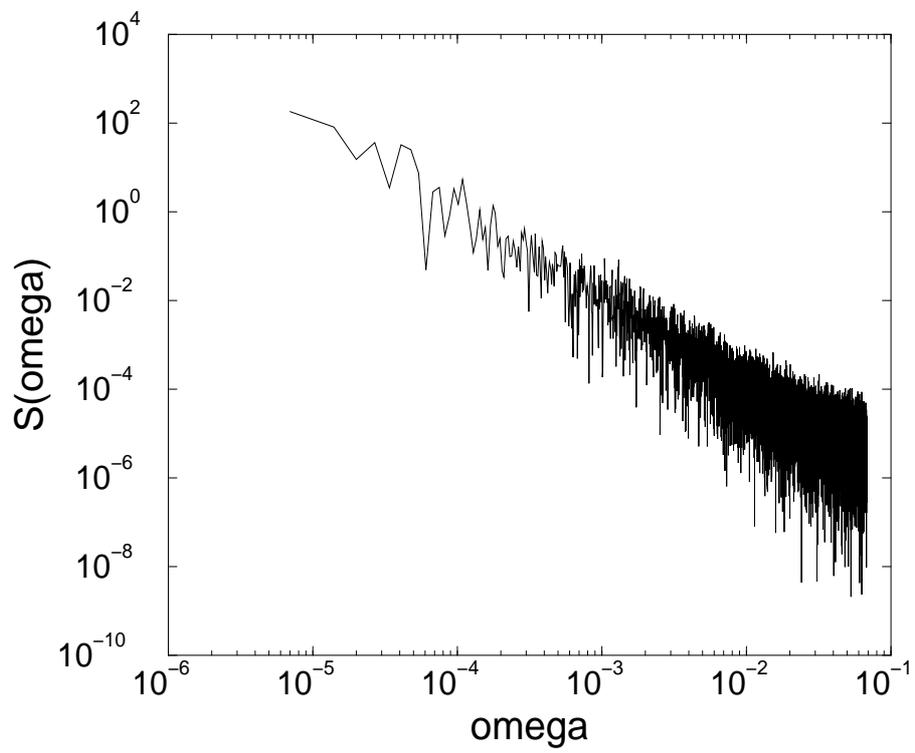


図 17: 図 13 の価格変動を、式 7 によってフーリエ変換したもの.

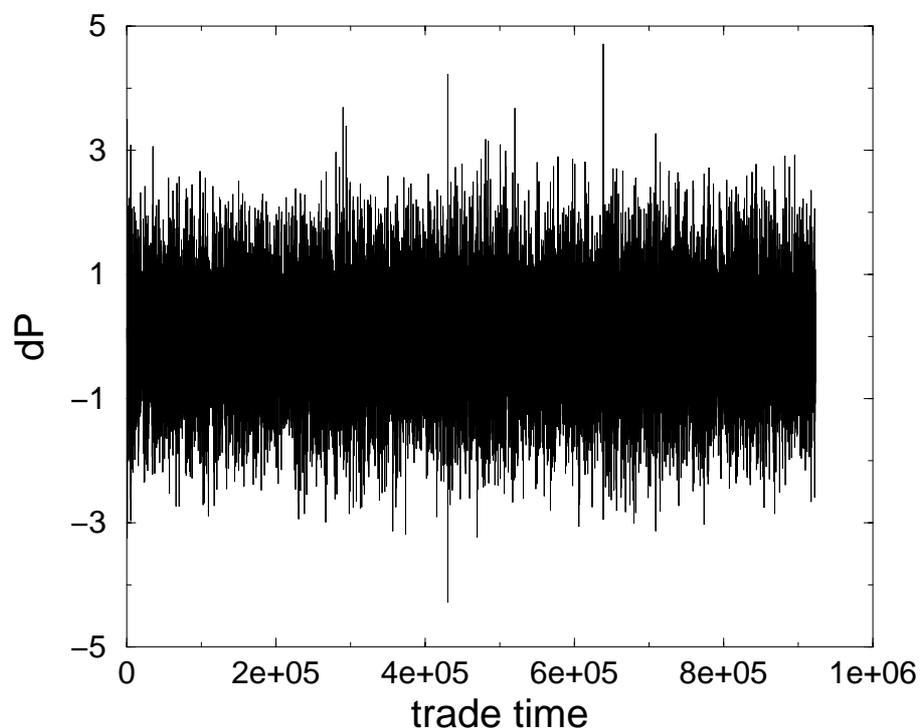


図 18: 図 13 における価格変動 ΔP の時系列.

きが現実にはハイリスク・ハイリターン代表となってしまう。その理由として、デリバティブの取り引きで動く金額は実態経済の何倍もの金額が投機目的で動いていること以外に、冪乗分布によって起こる価格変動をガウス分布から予測しようとしているからであると考えられる。

さらに単位時間 Δt を固定し、その時間間隔での価格の変位

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t) \quad (8)$$

の分布を観測した (図 21)。 Δt を大きくすれば価格の大きな変動が起こる頻度も大きくなっていく。

7 まとめ

本研究では、実際のマーケットでの価格の変動の要因のうち、特に需要・供給といった購買活動の基本にのみ着目した極めて単純なモデルを

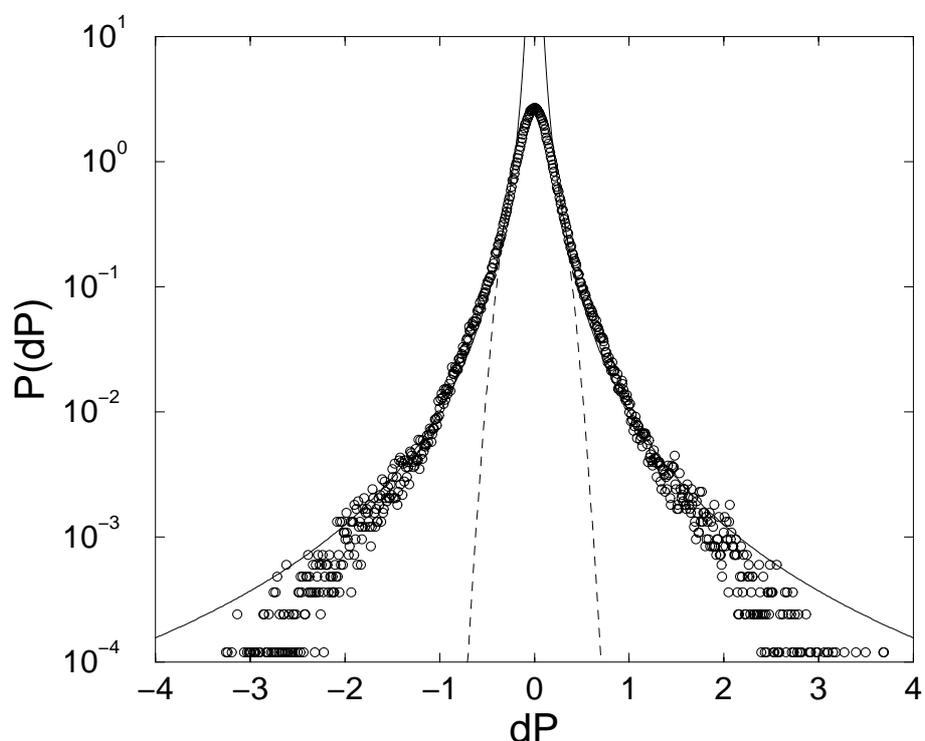


図 19: 図 18 の価格差の確率密度関数. はシミュレーションによって得られた価格変動 ΔP の頻度. 点線は Gauss 分布. 実線は Lévy 分布.

シミュレーションした。それにも関わらず、得られた変動 の特徴が実際のマーケットにおける価格変動の特徴を非常に良く再現した。日々激しく変動する価格は取り引きをするディーラーの思惑によって支配されていると思われがちである。しかし、今回の結果から、多数のディーラーが物を売る・買うといった行動こそが価格の変動を起こす最大の要因である事が分かる。また、ディーラーそれぞれは小幅に動いていたとしても、売買を行う過程において暴騰・暴落など大きな価格変動が必然的に起こりうることを示した。

さらに、定量的な解析によって価格の変動は時間の相関がなく、独立な振舞いをしていることも分かった。ある時点においてそれ以前の変動の特徴を調べても、その後の変動には全く影響を及ぼさないということである。株や為替の取り引きを行っているディーラー達は、彼らの経験によってチャートをテクニカルに解析して今後の予測をたてている。このよう

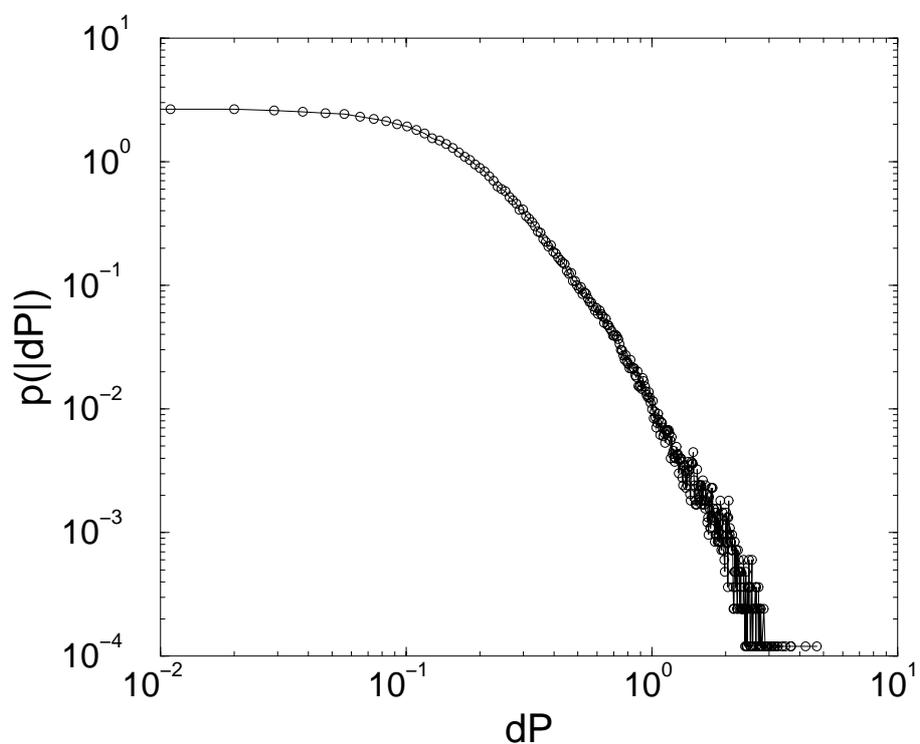


図 20: 価格変動の累積分布. 図 19 を両対数スケールによって表したもの. 裾野の部分がほぼ直線にのっている.

な相関は全くないとは言い切れないが、それは統計的に優位性を示す程ではなく、マクロな系で見るとやはり無相関に振舞っていることになる。

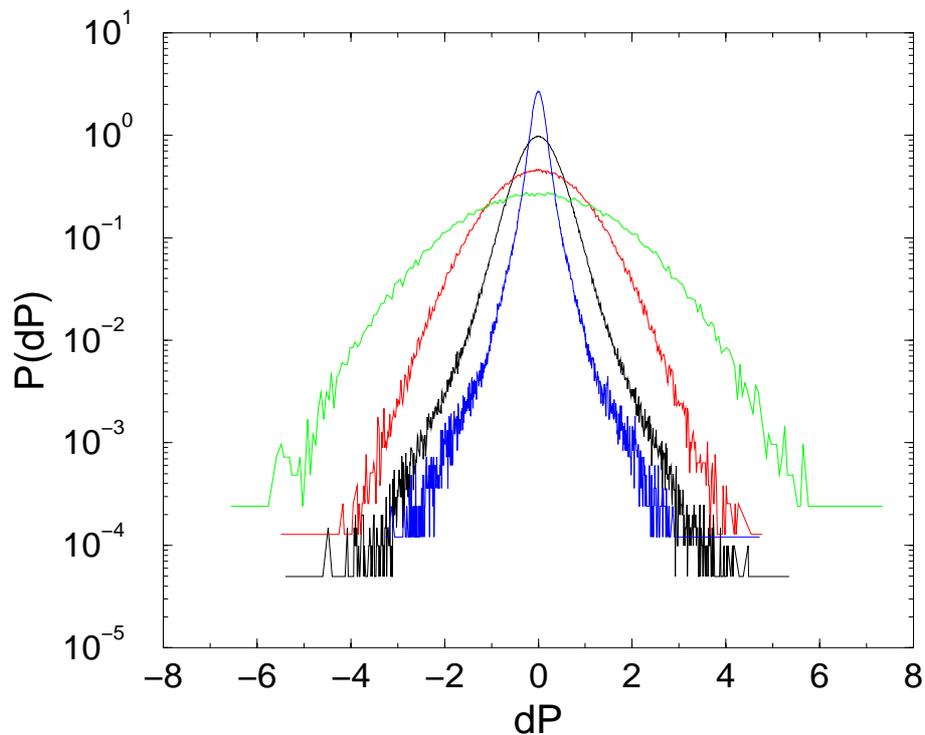


図 21: 式による価格差 ΔP の確率密度関数. ピークが最も高いものから順に $\Delta t=1, \Delta t=5, \Delta t=25, \Delta t=125$ とした.

A プログラムリスト

本研究で作成したプログラムを紹介する。

A.1 モデル

パラメータ a, b はプログラム上ではそれぞれ I, S となっている。

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#define _NTRADER 100
#define tradetime 1000000

int main()
```

```

{

FILE *fp;
int i,imin,j,jmax,Nsell,flag[_NTRADER];
float P_sell[_NTRADER/2],P_sellmin,P_buy[_NTRADER/2],P_buymax;
float c,Indivi,Supec,time;
float Delta_s[_NTRADER/2],Delta_b[_NTRADER/2];
float a[_NTRADER/2],b[_NTRADER/2];
float Adjust,Delta,I_s[_NTRADER/2],I_b[_NTRADER/2];
float X,Y,Price,K,L,k;

printf("The tradetime: %d\n",tradetime);
printf("The number of traders: %d\n",_NTRADER);
printf("      c=(0.1~0.3)      "); scanf("%f",&c);
printf("      sphere of individuality(0~1)      ");
scanf("%f",&Indivi);
printf("      sphere of specuration(0~1)      ");
scanf("%f",&Supec);

/* 個人の価格を決める */
for(i=0;i<_NTRADER/2;i++) /* Sellers 100 ~ 120 */
{
    P_sell[i]=((float)rand()/RAND_MAX)*20.0+100.0;
}

for(j=0;j<_NTRADER/2;j++) /* Buyesrs 80 ~ 100*/
{
    P_buy[j]=((float)rand()/RAND_MAX)*20.0+80.0;
}

/* 個人の個性を決める */
for(i=0;i<_NTRADER/2;i++) /* Sellers */
{
    I_s[i]=((float)rand()/RAND_MAX)*Indivi;
}

```

```

for(j=0;j<_NTRADER/2;j++) /* Buyesrs */
{
    I_b[j]=((float)rand()/RAND_MAX)*Indivi;
}

fp = fopen("price.dat","w");

X=100;
Y=100;

/* 取り引きのループ */
for(time=0;time<tradetime;time++)
{
    /* 取り引き毎の思惑 */
    for(i=0;i<_NTRADER/2;i++) /* Seller */
    {
        a[i]=((float)rand()/RAND_MAX)*Supec;
    }
    for(j=0;j<_NTRADER/2;j++) /* Buyesrs */
    {
        b[j]=((float)rand()/RAND_MAX)*Supec;
    }

    /* 取り引きできるディーラーを決める */
    P_sellmin=P_sell[0]; /* Seller */
    imin=0;
    for(i=0;i<_NTRADER/2;i++)
    {
        if (P_sellmin>P_sell[i])
        {
            P_sellmin=P_sell[i];
            imin=i;
        }
    }
}

```

```

    }

P_buymax=P_buy[0];    /* Buyer */
jmax=0;
for(j=0;j<_NTRADER/2;j++)
{
    if (P_buymax<P_buy[j])
    {
        P_buymax=P_buy[j];
        jmax=j;
    }
}

/* 価格を決める */
if ((P_sellmin-P_buymax)*(P_sellmin-P_buymax)<4)
{
    Price =(P_sellmin+P_buymax)/2;
    fprintf(fp,"%lf\n",Price);
    k=0;
}
else
{
    k+=c;
}

Y=X;
X=Price;

/*P_sellmin<P_buymax の場合における調節 */
if (P_sellmin<P_buymax)
{
    Adjust = -1;
}
else

```

```

{
    Adjust = 1;
}
/* 取り引きをしたディーラー同士で個性を入れ換える */
K= I_s[imin];
L= I_b[jmax];

I_s[imin]=L;
I_b[jmax]=K;

/* Deltaを決める */

P_sell[imin]=P_buymax+((float)rand()/RAND_MAX)*20;
P_buy[jmax]=P_sellmin-((float)rand()/RAND_MAX)*20;

/* デイラーの時間発展 */
for(i=0;i<_NTRADER/2;i++) /* Seller */
{
    P_sell[i]+=(-(Adjust)*(a[i])-I_s[i]+(c+k)*(X-Y));
}

for(j=0;j<_NTRADER/2;j++) /* Buyer */
{
    P_buy[j]+=(+(Adjust)*(b[j])+I_b[j]+(c+k)*(X-Y));
}

}

fclose(fp);

}

```

A.2 フーリエ変換

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#define Ndata 922336 /* データの数を入力 */

int main()

{

FILE *fp,*Somega_out;
int t,Iomega;
float f[Ndata],omega,Freal,Fimag,PI=2*asin(1.0);
float DeltaOmega=2.0*PI/Ndata,Somega;

if ((fp = fopen("price.dat","r")) == NULL)
{
printf("ERORR no data !\n");
exit(1);
}

for(t=0; t<Ndata; t++) /* input */
{
fscanf( fp , "%f" , &f[t] );
}

fclose(fp);

Somega_out=fopen("Somega.dat","w");

for(Iomega=0;Iomega<100000;Iomega++) {

omega=Iomega*DeltaOmega;
Freal=0.0;
Fimag=0.0;
for(t=0; t<Ndata; t++)
```

```

    {
        Freal += ( f[t] * cos( omega * t ) ) ;
        Fimag += ( f[t] * sin( omega * t ) ) ;
    }

Freal/=Ndata;
Fimag/=Ndata;

Somega= (Freal*Freal)+(Fimag*Fimag);

fprintf (Somega_out,"%f %e\n" , omega ,Somega);

}

fclose(Somega_out);
}

```

B 高安モデルの解析

B.1 はじめに

本研究以前にも売買の素過程着目した単純なモデルが提案されている [5]。ここではそのモデルについて同様の解析を行った結果を報告する。このモデルの特徴として、株や為替などの取引引きでは同じ人がある価格では売り手に、またある価格では買い手にと、価格によってポジションを変えている。これらの動きの特徴をとらえ、取引引きを動的な定式化によってシミュレーションを行っている。

B.2 モデルの概要

このモデルにおいては各ディーラーがそれぞれ売値と買値を提示する。 i 番目のディーラーの提示価格のうち売値を S_i 、買値を B_i とする。すなわち、取引き価格が S_i 以上ならばディーラー i は売り手になり、逆に B_i 以下ならば買い手になる。安く買い高く売る 経済活動の基本から、当然 $S_i > B_i$ が成立つ。さらにモデルの単純化の為、

$$S_i - B_i = L \quad (9)$$

とする。ここで L はディーラーや時間によらない定数である。

ある時刻に一番高い買値を提示した人、つまり $\max B_i$ を出したディーラーが買い手となり、 B_i に対して $B_i \geq S_j$ となる S_j を出したディーラー全てが売り手となる。取引き価格は $\max B_i$ とする。

ディーラー i の買値の時間発展は次式で与えられる。

$$B_i(t+1) = B_i(t) + \Delta_i + a_i \quad (10)$$

先程、買い手となったディーラーは「もっと安く売れるのではないか」という期待感から提示価格を下げ、逆に、売り手となったディーラーは「もっと高く売れるのではないか」という期待感から提示価格を上げる。買い手が Δ_i だけ値を下げると、買い手は Δ_i を買い手の数 N で割った $\frac{\delta}{N}$ 値を上げる。つまり、 Δ_i は、次のようになる。

$$\Delta_i = \begin{cases} -\delta & (\text{for buyer}) \\ \frac{\delta}{N} & (\text{for sellers}) \\ 0 & (\text{for others}) \end{cases}$$

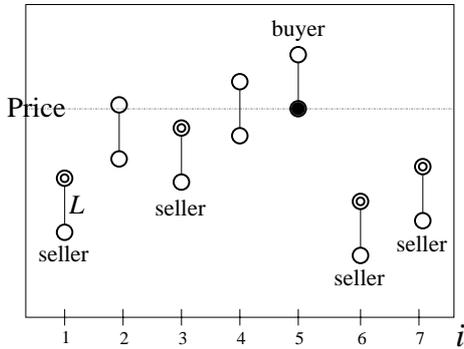


図 22: モデルの振舞い $t = 0$

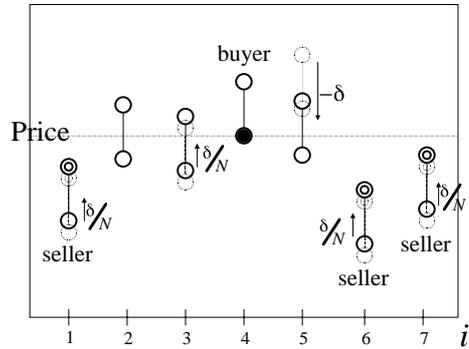


図 23: モデルの振舞い $t = 1$

更に、価格がある一定の値に収束することを避けるため、各取引ごとにそれぞれのディーラーに a_i を与える。 a_i はある範囲に設定した、正負の乱数で与えた。

以上より、ディーラー i の買値の時間発展は下式で与えられる。

B.3 モデルの振舞い

式 (10) によりディーラー 100 人を 10,000 回取り引きさせた価格変動が、図 24 である。このように、あたかもランダムな変動をしているかのような、激しい上下の動きを得られた。

B.4 モデルの解析

図 24 のスケールを変えてみても、同じような変動がみられる (図 25(a) ~ (b))。これをみると、フラクタルの特徴である、自己相似性が現れているのが分かる。

さらに、得られた価格を式 (7) によってフーリエ変換してみる (図 26)。このモデルにおいても変動のパワースペクトルが冪乗になっており、その傾きは ω^{-2} 付近であるのが分かる。先程も述べたが、これは価格変動に時間スケールがないことを表している。

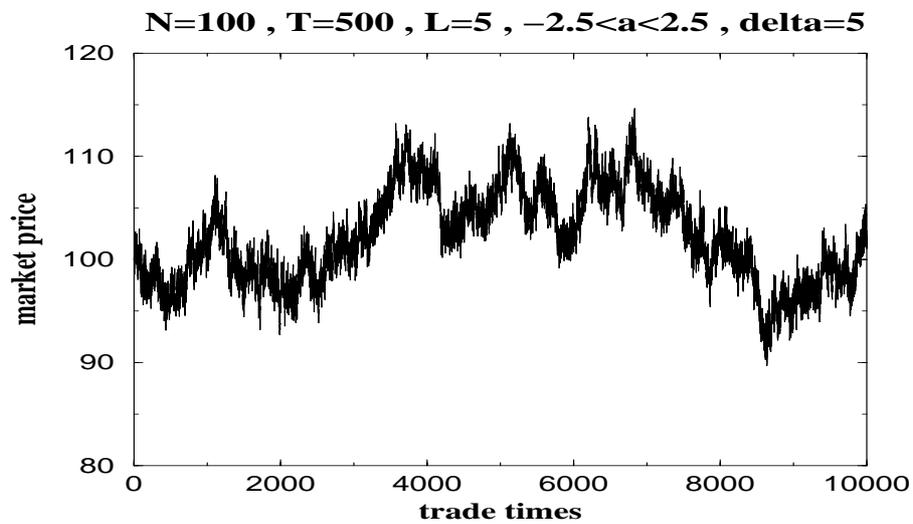
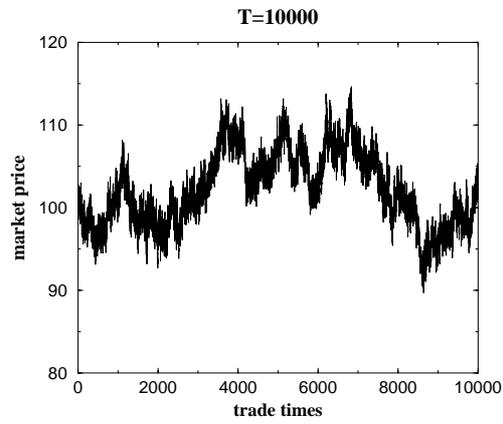


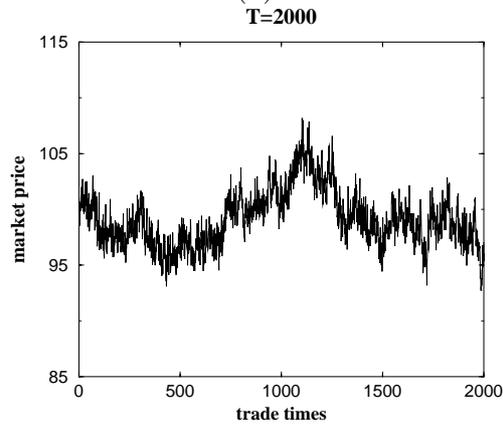
図 24: シミュレーションで得られた価格変動. $N = 100, T = 500, L = 5, -2.5 < a < 2.5, \delta = 5$ の場合.

B.5 まとめ

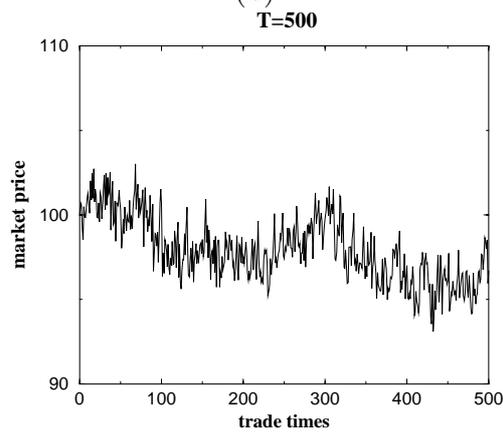
以上のように、取引の特徴のみをとらえ全く別のモデルによって得られた価格変動の解析結果は、どれも実際のマーケットでの価格変動の特徴をよく再現している。



(a)



(b)



(c)

図 25: (a) は図 24 の最初の部分を拡大したもの. (b) は (a) の最初の部分を拡大したもの. (c) は (b) の最初の部分を拡大したもの.

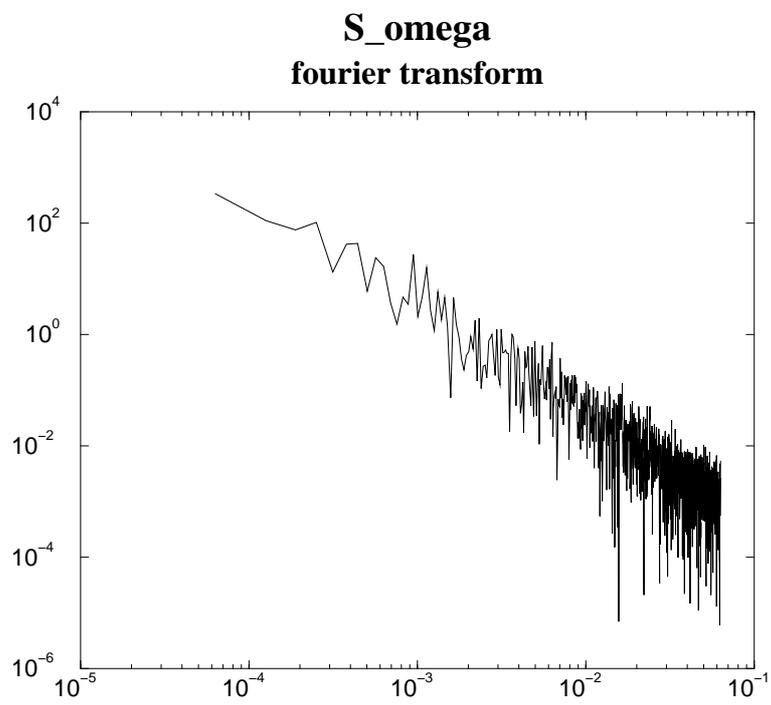


図 26: 図 24 の価格変動を、式 7 によってフーリエ変換したもの。

B.6 プログラムリスト

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#define _NTRADER 100

int main()
{
FILE *fp;
int i,imax,Nsell,flag[_NTRADER];
float B[_NTRADER],Bmax,Delta[_NTRADER],a[_NTRADER],price;

printf("The number of traders: %d\n",_NTRADER);

for(i=0;i<_NTRADER;i++)          /* 初期値を決める (80 ~ 120)  */
{
    B[i]=((float)rand()/RAND_MAX)*40.0+60.0;
}

fp = fopen("marketprice.dat","w");

for(price=0;price<10000;price++) /* 取り引きのループ */
{
    for(i=0;i<_NTRADER;i++)      /* 取り引き毎の乱数 */
    {
        a[i]=((float)rand()/RAND_MAX)*5.0-2.5;
    }

    Bmax=B[0];
    imax=0;
    for(i=0;i<_NTRADER;i++)      /* 買い手 (Bmax) の決定 */
    {
```

```

        if (Bmax<B[i])
        {
            Bmax=B[i];
            imax=i;
        }
    }

    fprintf(fp,"%f\n",Bmax);    /* output */

    Nsell=0;
    for(i=0;i<_NTRADER;i++) /*売り手とその数 Nsell の決定*/
    {
        if (B[i]+5<=Bmax)
        {
            flag[i]=1;
            Nsell++;
        }
        else
        {
            flag[i]=0;
        }
    }

    Delta[imax]=-5.0;

    for(i=0;i<_NTRADER;i++)    /* Deltaの決定 */
    {
        if (flag[i]==1)
        {
            Delta[i]=+5.0/Nsell;
        }
        else if (i != imax)
        {
            Delta[i]=0.0;
        }
    }

```

```
    }  
  
    for(i=0;i<_NTRADER;i++)    /* デイラーの時間発展 */  
    {  
        B[i]+=(Delta[i]+a[i]);  
    }  
}  
fclose(fp);  
}
```

参考文献

- [1] 高安 秀樹, フラクタル, 27, 朝倉書店, 1997,
- [2] 高安 秀樹, フラクタル, 2, 朝倉書店, 1997,
- [3] 高安秀樹, 日本物理学会誌, 8, vol.54, No.1, 1999
- [4] A.Sato H.Takayasu, シミュレーション 第7巻第4号, 281-283, 1998
- [5] H.Takayasu, Physica A 184, 127-134, 1992

謝辞

最後に、この研究で多大な御指導をして下さった羽田野直道先生に心から感謝の意を表したいと思います。羽田野先生には本研究や本文作成に詳細な部分まで多数の手厚い御指導を頂きました。お忙しい中、時間を惜しまず御指導にあたって下さったおかげで、今回の研究が無事終了できたと思います。また、高安秀樹先生にも本研究を進めるにあたり、多数の論文等を参考とさせて頂いたことを感謝致します。